

31.38 1)

Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f . Τότε

$$3 \int_0^1 f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3} \Rightarrow F(1) - F(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow F(1) = \frac{1}{3} + F(0)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = F(x) - \frac{x^3}{3}$, $x \in [0,1]$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$ ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων

$$\text{με } h'(x) = F'(x) - \left(\frac{x^3}{3}\right)' \Rightarrow h'(x) = f(x) - x^2 \quad (1)$$

$$h(0) = F(0)$$

$$h(1) = F(1) - \frac{1^3}{3} \Rightarrow h(1) = F(1) - \frac{1}{3} \stackrel{F(1)=\frac{1}{3}+F(0)}{\Rightarrow} h(1) = \frac{1}{3} + F(0) - \frac{1}{3} \Rightarrow h(1) = F(0)$$

$$\text{Άρα } h(0) = h(1)$$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε ,

$$\text{υπάρχει τουλάχιστον ένα } x_0 \in (0,1) \text{ τέτοιο ώστε } h'(x_0) = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(x_0) - x_0^2 = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0^2$$

31.38 2)

Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f . Τότε

$$2 \int_0^1 f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \Rightarrow F(1) - F(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow F(1) = \frac{1}{2} + F(0)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = F(x) - \frac{x^2}{2}$, $x \in [0,1]$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$ ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων

$$\text{με } h'(x) = F'(x) - \left(\frac{x^2}{2}\right)' \Rightarrow h'(x) = f(x) - x \quad (1)$$

$$h(0) = F(0)$$

$$h(1) = F(1) - \frac{1^2}{2} \Rightarrow h(1) = F(1) - \frac{1}{2} \stackrel{F(1)=\frac{1}{2}+F(0)}{\Rightarrow} h(1) = \frac{1}{2} + F(0) - \frac{1}{2} \Rightarrow h(1) = F(0)$$

$$\text{Άρα } h(0) = h(1)$$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε ,

$$\text{υπάρχει τουλάχιστον ένα } x_0 \in (0,1) \text{ τέτοιο ώστε } h'(x_0) = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(x_0) - x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$$

31.38 3)

Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f . Τότε

$$\int_{2022}^{2023} f(x) dx = 1 \Rightarrow F(2023) - F(2022) = 1 \Rightarrow F(2023) = 1 + F(2022)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = F(x) - x$, $x \in [2022, 2023]$

Η συνάρτηση h

- είναι συνεχής στο διάστημα $[2022, 2023]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(2022, 2023)$ ως διαφορά παραγωγισίμων

συναρτήσεων με $h'(x) = F'(x) - (x)' \Rightarrow h'(x) = f(x) - 1$ (1)

$$h(2022) = F(2022) - 2022$$

$$h(2023) = F(2023) - 2023 \stackrel{F(2023)=1+F(2022)}{\Rightarrow} h(2023) = 1 + F(2022) - 2023 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(2023) = F(2022) - 2022$$

$$\text{Άρα } h(2022) = h(2023)$$

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2022, 2023)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) \stackrel{(1)}{=} 0 \Rightarrow f(\xi) - 1 = 0 \Rightarrow f(\xi) = 1$$