

31.34 1)

- α) Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολωνυμική με $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και $1 - 1$

β) $\int_1^{11} f^{-1}(x) dx$ $\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=f^{-1}(x) \Rightarrow x=f(y) \Rightarrow dx=f'(y)dy \\ \text{για } x=1 \Rightarrow y=f^{-1}(1)=0 \text{ (διότι } f(0)=1) \\ \text{για } x=11 \Rightarrow y=f^{-1}(11)=2 \text{ (διότι } f(2)=11)}}{=}$ $\overset{\text{παραγοντική ολοκλήρωση}}{=} \int_0^2 y f'(y) dy$

$$= [y f(y)]_0^2 - \int_0^2 (y)' f(y) dy = 2f(2) - 0f(0) - \int_0^2 y^3 + y + 1 dy \overset{f(2)=11}{=} \\ = 22 - \left[\frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2} + y \right]_0^2 = 22 - \frac{2^4}{4} - \frac{2^2}{2} - 2 = \boxed{14}$$

31.34 2)

- α) Η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = e^x + 3x^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και $1 - 1$

β) $\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$ $\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=f^{-1}(x) \Rightarrow x=f(y) \Rightarrow dx=f'(y)dy \\ \text{για } x=1 \Rightarrow y=f^{-1}(1)=0 \text{ (διότι } f(0)=1) \\ \text{για } x=e+1 \Rightarrow y=f^{-1}(e+1)=1 \text{ (διότι } f(1)=e+1)}}{=}$ $\overset{\text{παραγοντική ολοκλήρωση}}{=} \int_0^1 y f'(y) dy$

$$= [y f(y)]_0^1 - \int_0^1 (y)' f(y) dy = 1f(1) - 0f(0) - \int_0^1 e^y + y^3 dy \overset{f(1)=e+1}{=} \\ = e + 1 - \left[e^y + \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = e + 1 - \left[\left(e + \frac{1}{4} \right) - \left(e^0 + \frac{0^4}{4} \right) \right] = \cancel{e} + 1 - \cancel{e} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{7}{4}$$

31.34 3)

- α) Η f είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = 1 + \eta \mu x \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (με την ισότητα να ισχύει σε μεμονωμένα σημεία). Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και $1 - 1$

β) $\int_{-1}^{\pi+1} f^{-1}(x) dx$ $\overset{\substack{\text{θέτουμε } y=f^{-1}(x) \Rightarrow x=f(y) \Rightarrow dx=f'(y)dy \\ \text{για } x=-1 \Rightarrow y=f^{-1}(-1)=0 \text{ (διότι } f(0)=-1) \\ \text{για } x=\pi+1 \Rightarrow y=f^{-1}(\pi+1)=\pi \text{ (διότι } f(\pi)=\pi+1)}}{=}$ $\overset{\text{παραγοντική ολοκλήρωση}}{=} \int_0^{\pi} y f'(y) dy$

$$= [y f(y)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (y)' f(y) dy = \pi f(\pi) - 0f(0) - \int_0^{\pi} y + \sigma \upsilon \nu y dy \overset{f(\pi)=\pi+1}{=} \\ = \pi(\pi+1) - \left[\frac{y^2}{2} - \eta \mu x \right]_0^{\pi} = \pi^2 + \pi - \frac{\pi^2}{2} + \eta \mu \pi + 0 = \pi + \frac{\pi^2}{2}$$