

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

31.31 1)

α) Η f είναι συνεχής στο $[-2, 0)$ ως πολωνυμική

Η f είναι συνεχής στο $(0, 1]$ ως εκθετική

και ακόμη

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (8x + 1) = 8 \cdot 0 + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x) = e^0 = 1 \\ f(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \eta \ f \ \text{είναι συνεχής στο } x_0 = 0$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $[-2, 1]$

$$\beta) \int_{-2}^1 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-2}^0 8x + 1 dx + \int_0^1 e^x dx =$$

$$= \left[4x^2 + x \right]_{-2}^0 + \left[e^x \right]_0^1 = 4 \cdot 0^2 + 0 - (4(-2)^2 - 2) + e^1 - e^0 = e - 15$$

31.31 2)

α) Η f είναι συνεχής στο $[0, 1)$ ως πολωνυμική

Η f είναι συνεχής στο $(1, 2]$ ως πολωνυμική

και ακόμη

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 3) = 2 \cdot 1 + 3 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (6x^2 - 2x + 1) = 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 5 \\ f(1) &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \eta \ f \ \text{είναι συνεχής στο } x_0 = 1$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$

$$\beta) \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 2x + 3 dx + \int_1^2 6x^2 - 2x + 1 dx =$$

$$= \left[x^2 + 3x \right]_0^1 + \left[2x^3 - x^2 + x \right]_1^2 =$$

$$= (1^2 + 3 \cdot 1) - (0^2 + 3 \cdot 0) + (2 \cdot 2^3 - 2^2 + 2) - (2 \cdot 1^3 - 1^2 + 1) =$$

$$= 4 + 16 - 4 + 2 - 2 = \boxed{16}$$

31.31 3)

α) Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ ως τριγωνομετρική

Η f είναι συνεχής στο $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ ως τριγωνομετρική

και ακόμη

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} (\eta \mu x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} (\sigma \upsilon \nu x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \eta \text{ } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = \frac{\pi}{4}$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\beta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \eta \mu x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma \upsilon \nu x dx =$$

$$= \left[-\sigma \upsilon \nu x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\eta \mu x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\sigma \upsilon \nu \frac{\pi}{4} + \sigma \upsilon \nu 0 + \eta \mu \frac{\pi}{2} - \eta \mu \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 2 - \frac{2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$$

31.31 4)

α) Η f είναι συνεχής στο $[0, 1)$ ως πολυωνυμική

Η f είναι συνεχής στο $(1, e]$ ως ρητή

και ακόμη

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x} \right) = 1 \\ f(1) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \eta \text{ } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = 1$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $[0, e]$

$$\beta) \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^e f(x) dx = \int_0^1 2x - 1 dx + \int_1^e \frac{1}{x} dx =$$

$$= \left[x^2 - x \right]_0^1 + \left[\ln |x| \right]_1^e = 1^2 - 1 - (0^2 - 0) + \ln |e| - \ln |1| = 1$$