

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

31.29 1)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in [0, 2]$ ισχύει $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

Πράγματι

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x > 0$ είναι

$$\ln x \leq x-1 \quad \Rightarrow \quad \ln(x+1) \leq x+1-1 \Rightarrow \ln(x+1) \leq x \quad (1)$$

Ακόμη θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + \frac{2x}{2} = \frac{1 - x - x + x^2 + x}{x+1} = \frac{x^2}{x+1} > 0 \quad \text{για κάθε } x \in (0, 2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$

Επομένως για κάθε $x \in [0, 2]$ είναι

$$x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) \Rightarrow \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0 \Rightarrow \ln(x+1) \geq x - \frac{x^2}{2} \quad (2)$$

Άρα $(1), (2) \Rightarrow x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$, για κάθε $x \in [0, 2]$

$$\Rightarrow \int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{2} \right) dx \leq \int_0^2 [\ln(1+x)] dx \leq \int_0^2 x dx$$

31.29 2)

Έχουμε ισοδύναμα ότι

$$\int_0^e \sqrt{1+x} dx \leq \frac{1}{2} \int_0^e (x+2) dx \Leftrightarrow \int_0^e \sqrt{1+x} dx - \frac{1}{2} \int_0^e (x+2) dx \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^e \left[\sqrt{1+x} - \frac{1}{2}(x+2) \right] dx \leq 0$$

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{1+x} - \frac{1}{2}(x+2)$, $x \in [0, e]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, e]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων και για κάθε $x \in [0, e]$ είναι

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2} = \frac{1 - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}} \stackrel{\text{πολλαπλασιάζουμε τους όρους με την συζυγή παράσταση}}{=} \frac{1^2 - \sqrt{x+1}^2}{2\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})} = \\ &= \frac{-x}{2\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})} < 0, \text{ για κάθε } x \in (0, e) \end{aligned}$$

οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, e]$

Έτσι έχουμε

$$x \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(0) \Rightarrow f(x) \leq 0 \Rightarrow \int_0^e \left[\sqrt{1+x} - \frac{1}{2}(x+2) \right] dx \leq 0$$

31.29 3)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in [1, 2]$ ισχύει $1 < \frac{e^x - 1}{x} \leq e^x$

Πράγματι

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, x]$, ως εκθετική, ($x \in [1, 2]$)

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, x)$, ως εκθετική με $f'(x) = e^x$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (0, x)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow e^\xi = \frac{e^x - e^0}{x} \Rightarrow e^\xi = \frac{e^x - 1}{x} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$1 < \frac{e^x - 1}{x} \leq e^x \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 1 < e^\xi \leq e^x \Leftrightarrow e^0 < e^\xi \leq e^x \Leftrightarrow 0 < \xi \leq x$$

που ισχύει διότι $\xi \in (0, x)$

Άρα $1 < \frac{e^x - 1}{x} \leq e^x$, για κάθε $x \in [1, 2]$

$$\Rightarrow 1 < \int_1^2 \frac{e^x - 1}{x} dx \leq \int_1^2 e^x dx$$