

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

31.28 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1, 1]$ με $f'(x) = \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > 0$, για κάθε

$x \in (-1, 1)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$

Έτσι έχουμε

$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(-1) \leq f(x) \leq f(1) \Rightarrow \frac{-1}{1+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{1+1} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $x \in [-1, 1]$ και άρα

$$-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{-1}^1 -\frac{1}{2} dx \leq \int_{-1}^1 f(x) dx \leq \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dx \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}[1 - (-1)] \leq \int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{2}[1 - (-1)] \Rightarrow -1 \leq \int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2} dx \leq 1$$

31.28 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = (x-2)\sqrt{x}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 3]$ με

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x-2}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}^2 + x - 2}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-2}{\sqrt{x}} = \frac{x+2(x-1)}{\sqrt{x}} > 0, \text{ για κάθε } x \in (1, 3)$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 3]$

Έτσι έχουμε

$$1 \leq x \leq 3 \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(3) \Rightarrow (1-2)\sqrt{1} \leq f(x) \leq (3-2)\sqrt{3} \Rightarrow -1 \leq f(x) \leq \sqrt{3}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $x \in [1, 3]$ και άρα

$$-1 \leq f(x) \leq \sqrt{3} \Rightarrow \int_1^3 -1 dx \leq \int_1^3 f(x) dx \leq \int_1^3 \sqrt{3} dx \Rightarrow$$

$$-1(3-1) \leq \int_1^3 (x-2)\sqrt{x} dx \leq \sqrt{3}(3-1) \Rightarrow -2 \leq \int_1^3 (x-2)\sqrt{x} dx \leq 2\sqrt{3}$$

31.28 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [e, 2e] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[e, 2e]$ με $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$, για κάθε

$x \in (e, 2e)$

οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e, 2e]$

Έτσι έχουμε

$$e \leq x \leq 2e \Rightarrow f(e) \geq f(x) \geq f(2e) \Rightarrow \frac{\ln e}{e} \geq f(x) \geq \frac{\ln 2e}{2e} \Rightarrow \frac{1}{e} \geq f(x) \geq \frac{1+\ln 2}{2e}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $x \in [e, 2e]$ και άρα

$$\frac{1+\ln 2}{2e} \leq f(x) \leq \frac{1}{e} \Rightarrow \int_e^{2e} \frac{1+\ln 2}{2e} dx \leq \int_e^{2e} f(x) dx \leq \int_e^{2e} \frac{1}{e} dx \Rightarrow \frac{1+\ln 2}{2e} (2e-e) \leq \int_e^{2e} \frac{\ln x}{x} dx \leq \frac{1}{e} (2e-e) \Rightarrow \frac{1+\ln 2}{2} \leq \int_e^{2e} \frac{\ln x}{x} dx \leq 1$$

31.28 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 3]$ με $f'(x) = \frac{x^3 e^x - 3x^2 e^x}{x^6} = \frac{x^2 e^x (x-3)}{x^6} < 0$, για κάθε $x \in (1, 3)$

οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$

Έτσι έχουμε

$$1 \leq x \leq 3 \Rightarrow f(1) \geq f(x) \geq f(3) \Rightarrow \frac{e^1}{1^3} \geq f(x) \geq \frac{e^3}{3^3} \Rightarrow \frac{e^3}{27} \leq f(x) \leq e$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $x \in [1, 3]$ και άρα

$$\frac{e^3}{27} \leq f(x) \leq e \Rightarrow \int_1^3 \frac{e^3}{27} dx \leq \int_1^3 f(x) dx \leq \int_1^3 e dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{e^3}{27} (3-1) \leq \int_1^3 \frac{e^x}{x^3} dx \leq e(3-1) \Rightarrow \frac{2e^3}{27} \leq \int_1^3 \frac{e^x}{x^3} dx \leq 2e$$

31.28 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: \left[\frac{1}{2e}, 1\right] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^x$

Είναι $f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$. Οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[\frac{1}{2e}, 1\right]$ με

$$f'(x) = e^{x \ln x} (x \ln x)' = e^{x \ln x} (\ln x + 1), \text{ για κάθε } x \in \left[\frac{1}{2e}, 1\right]$$

Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x \ln x} (\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

Έτσι η f' μηδενίζεται στο $x_0 = \frac{1}{e}$ με $f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e}}$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	$\frac{1}{2e}$	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$f'(x)$			-	0	+
$f(x)$					

$\frac{1}{e}$

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = \frac{1}{e}$ και

$$\text{για κάθε } x \in \left[\frac{1}{2e}, 1\right] \text{ είναι } f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow f(x) \geq e^{-\frac{1}{e}}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $x \in [e, 2e]$ και άρα

$$f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right) \Rightarrow f(x) \geq e^{-\frac{1}{e}} \Rightarrow \int_{\frac{1}{2e}}^1 f(x) dx \geq \int_{\frac{1}{2e}}^1 e^{-\frac{1}{e}} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2e}}^1 x^x dx \geq e^{-\frac{1}{e}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2e}\right)$$

31.28 6)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}}$

Οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 5]$ με

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{x-1}{x^2}} \left(\frac{x-1}{x^2} \right)' = e^{\frac{x-1}{x^2}} \cdot \frac{1 \cdot x^2 - 2x(x-1)}{x^4} = e^{\frac{x-1}{x^2}} \cdot \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4} = \\ &= e^{\frac{x-1}{x^2}} \cdot \frac{-x^2 + 2x}{x^4} = e^{\frac{x-1}{x^2}} \cdot \frac{-x(x-2)}{x^4} = e^{\frac{x-1}{x^2}} \cdot \frac{-x+2}{x^3}, \text{ για κάθε } x \in [1, 5] \end{aligned}$$

$$\text{Έχουμε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x+2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Έτσι η } f' \text{ μηδενίζεται στο } x_0 = 2 \text{ με } f(2) = e^{\frac{2-1}{2^2}} = e^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{e}$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	1	2	5	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$			$\sqrt[4]{e}$		

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 2$ και

$$\text{για κάθε } x \in [1, 5] \text{ είναι } f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow f(x) \leq \sqrt[4]{e}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $x \in [1, 5]$ και άρα

$$f(x) \leq f(2) \Rightarrow f(x) \leq \sqrt[4]{e} \Rightarrow \int_1^5 f(x) dx \leq \int_1^5 \sqrt[4]{e} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^5 f(x) dx \leq \sqrt[4]{e} (5-1) \Rightarrow \int_1^5 f(x) dx \leq 4\sqrt[4]{e}$$

31.28 7)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: [2, e] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[2, e]$ με $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} < 0$, για κάθε $x \in (2, e)$

οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, e]$

Έτσι έχουμε

$$2 \leq x \leq e \Rightarrow f(2) \geq f(x) \geq f(e) \Rightarrow \frac{2}{\ln 2} \geq f(x) \geq \frac{e}{\ln e} \Rightarrow e \leq f(x) \leq \frac{2}{\ln 2}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $x \in [e, 2e]$ και άρα

$$e \leq f(x) \leq \frac{2}{\ln 2} \Rightarrow \int_2^e e dx \leq \int_2^e f(x) dx \leq \int_2^e \frac{2}{\ln 2} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e(e-2) \leq \int_2^e f(x) dx \leq \frac{2}{\ln 2} (e-2) \Rightarrow \frac{e(e-2)}{e-2} \leq \frac{1}{e-2} \int_2^e f(x) dx \leq \frac{\frac{2}{\ln 2} (e-2)}{e-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e \leq \frac{1}{e-2} \int_2^e f(x) dx \leq \frac{2}{\ln 2}$$

31.28 8)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x (x^2 - 3)$

Οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-2, 3]$ με

$$f'(x) = e^x (x^2 - 3) + e^x 2x = e^x (x^2 + 2x - 3) =$$

$$x^2 + 2x - 3: \Delta = 4 + 12 = 16, x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3 \end{matrix}$$

$$= e^x (x-1)(x+3),$$

για κάθε $x \in [-2, 3]$

$$\text{Έχουμε } f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} e^x \neq 0 \\ x \in [-2, 3] \Rightarrow x+3 \neq 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Έτσι η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 1$ με $f(1) = e^1 (1^2 - 3) = -2e$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$			-	+	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$ και

για κάθε $x \in [-2, 3]$ είναι $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq -2e$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $x \in [-2, 3]$ και άρα

$$f(x) \geq f(1) \Rightarrow f(x) \geq -2e \Rightarrow \int_{-2}^3 f(x) dx \geq \int_{-2}^3 -2e dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^3 f(x) dx \geq -2e[3 - (-2)] \Rightarrow \int_{-2}^3 f(x) dx \geq -10e$$

31.28 9)

Αν $\alpha = \beta$, η σχέση ισχύει ως ισότητα

Έστω $\alpha < \beta$. Τότε

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{e^x}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f'(x) = -e^{-x} < 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$

οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$

Έτσι έχουμε

$$\alpha \leq x \leq \beta \xrightarrow{f \searrow} f(\alpha) \geq f(x) \geq f(\beta) \Rightarrow \frac{1}{e^\alpha} \geq f(x) \geq \frac{1}{e^\beta} \Rightarrow \frac{1}{e^\beta} \leq f(x) \leq \frac{1}{e^\alpha}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και άρα

$$\frac{1}{e^\beta} \leq f(x) \leq \frac{1}{e^\alpha} \Rightarrow \int_\alpha^\beta \frac{1}{e^\beta} dx \leq \int_\alpha^\beta f(x) dx \leq \int_\alpha^\beta \frac{1}{e^\alpha} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\beta - \alpha}{e^\beta} \leq \int_\alpha^\beta f(x) dx \leq \frac{\beta - \alpha}{e^\alpha}}$$

Ομοίως αν $\alpha > \beta$

31.28 10)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: \left[\frac{1}{2}, 2\right] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{e^x}{x^x}$

$$\text{Είναι } f(x) = \frac{e^x}{e^{x \ln x}} = \frac{e^x}{e^{x \ln x}} = e^{x - x \ln x} = e^{x(1 - \ln x)}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x(1-\ln x)} [x(1-\ln x)]' = e^{x(1-\ln x)} \left(1 - \ln x + x \frac{-1}{x} \right) = e^{x(1-\ln x)} (1 - \ln x - 1) = \\ &= -e^{x(1-\ln x)} \ln x, \text{ για κάθε } x \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right] \end{aligned}$$

Έτσι η f' μηδενίζεται στο $x_0 = 1$ με $f(1) = \frac{e^1}{1^1} = e$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{e}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2e} \quad \kappa\alpha 1 \quad f(2) = \frac{e^2}{2^2} = \frac{e^2}{4}$$

The diagram shows a horizontal axis labeled x with points $-\infty$, $\frac{1}{2}$, 1 , 2 , and $+\infty$. Above the axis, the derivative $f'(x)$ is indicated: it is negative for $x < 1$ (shaded area), zero at $x = 1$ (marked with a circle), and positive for $x > 1$ (shaded area). Below the axis, the function $f(x)$ is shown. At $x = 1$, the function value is e . Arrows point from the e value to two boxes: $\sqrt{2e}$ on the left and $\frac{e^2}{4}$ on the right, representing the function values at $x = \frac{1}{2}$ and $x = 2$ respectively.

Οπότε για κάθε $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ είναι

$$\Rightarrow \boxed{\frac{3e^2}{8} \leq \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx \leq \frac{3e}{2}}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{3-\eta\mu^2 x}} \cdot \frac{-\cancel{2}\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\cancel{2}\sqrt{3-\eta\mu^2 x}} = \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{3-\eta\mu^2 x}} > 0, \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Έτσι έχουμε

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3-\eta\mu^2 0}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3-\eta\mu^2 \frac{\pi}{2}}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και άρα

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{3}}{3} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \Rightarrow \boxed{\frac{\pi\sqrt{3}}{6} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}}$$

31.28 12)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{3+2\eta\mu^2 x}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ με $f'(x) = -\frac{4\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{(3+2\eta\mu^2 x)^2}$, για κάθε $x \in [0, \pi]$

Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \frac{\pi}{2}$ ή $x = \pi$

Έτσι η f' μηδενίζεται

$$\text{στο } x_0 = 0 \text{ με } f(0) = \frac{1}{3+2\eta\mu^2 0} = \frac{1}{3}$$

$$\text{στο } x_0 = \frac{\pi}{2} \text{ με } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3+2\eta\mu^2 \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5}$$

$$\text{στο } x_0 = \pi \text{ με } f(\pi) = \frac{1}{3+2\eta\mu^2 \pi} = \frac{1}{3}$$

Τα πρόσημα της f' (εξαρτώνται μόνο από το $-\sigma\upsilon\nu x$ διότι είναι $\eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$), η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	$+$	
$f(x)$		$\boxed{\frac{1}{3}}$	$\boxed{\frac{1}{5}}$	$\boxed{\frac{1}{3}}$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 0$

και στο $x_0 = \pi$ ίσο με $\frac{1}{3}$ και ολικό ελάχιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ίσο με $\frac{1}{5}$

Οπότε για κάθε $x \in [0, \pi]$ είναι

$$\frac{1}{5} \leq f(x) \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{1}{5} dx \leq \int_0^{\pi} f(x) dx \leq \int_0^{\pi} \frac{1}{3} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}(\pi - 0) \leq \int_0^{\pi} f(x) dx \leq \frac{1}{3}(\pi - 0) \Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{5} \leq \int_0^{\pi} f(x) dx \leq \frac{\pi}{3}}$$