

α) Κάνουμε την διαίρεση των πολωνύμων

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\ \underline{-x^3 + x^2} & x^2 - 5x + 6 \\ -5x^2 + 11x - 6 & \\ \underline{5x^2 - 5x} & \text{Άρα} \\ 6x - 6 & \\ \underline{-6x + 6} & \\ 0 & \end{array}$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x^2 - 5x + 6)(x - 1)$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \int_0^{-1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 1} dx &= \int_0^{-1} \frac{(x^2 - 5x + 6)(\cancel{x - 1})}{\cancel{x - 1}} dx = \int_0^{-1} x^2 - 5x + 6 dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x \right]_0^{-1} = \frac{(-1)^3}{3} - \frac{5(-1)^2}{2} + 6 \cdot (-1) = -\frac{1}{3} - \frac{5}{2} - 6 = -\frac{53}{6} \end{aligned}$$

β) Κάνουμε την διαίρεση των πολωνύμων

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x + 6 & x^2 + x - 2 \\ \underline{-x^3 - x^2 + 2x} & x - 1 \\ \cancel{-x^2} + 4x + 6 & \text{Οπότε} \\ \underline{x^2 + x - 2} & \\ 5x + 4 & \end{array}$$

$$x^3 + 2x + 6 = (x - 1)(x^2 + x - 2) + 5x + 4$$

Άρα αν I είναι το ζητούμενο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{-1} \frac{x^3 + 2x + 6}{x^2 + x - 2} dx \Rightarrow I = \int_0^{-1} \frac{(x - 1)(x^2 + x - 2) + 5x + 4}{x^2 + x - 2} dx \Rightarrow 9 \\ \Rightarrow I &= \int_0^{-1} \frac{(x - 1)(\cancel{x^2 + x - 2})}{\cancel{x^2 + x - 2}} dx + \int_0^{-1} \frac{5x + 4}{x^2 + x - 2} dx \Rightarrow \\ \Rightarrow I &= \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^{-1} + \int_0^{-1} \frac{5x + 4}{x^2 + x - 2} dx \Rightarrow I = \frac{1}{2} + 1 + \int_0^{-1} \frac{5x + 4}{x^2 + x - 2} dx \quad (1) \end{aligned}$$

Τώρα θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I_1 = \int_0^{-1} \frac{5x + 4}{x^2 + x - 2} dx$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \frac{5x + 4}{x^2 + x - 2} &= \frac{5x + 4}{(x + 2)(x - 1)} \end{aligned}$$

$\Delta = 9, x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1 - 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2 \\ x_2 = \frac{-1 + 3}{2} \Rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$

Οπότε θα πρέπει να βρούμε τα A και B ώστε $\frac{5x + 4}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 1}$

Έχουμε

$$\frac{5x+4}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x+4 = \cancel{(x+2)}(x-1) \frac{A}{\cancel{x+2}} + (x+2) \cancel{(x-1)} \frac{B}{\cancel{x-1}}$$

$$\Rightarrow 5x+4 = A(x-1) + B(x+2) \Rightarrow 5x+4 = Ax - A + Bx + 2B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x+4 = (A+B)x + (-A+2B) \Rightarrow \begin{cases} A+B=5 \\ -A+2B=4 \end{cases} \xrightarrow{\text{λύνουμε το σύστημα}} \begin{cases} A=2 \\ B=3 \end{cases}$$

$$\text{Οπότε } \frac{5x+4}{(x+2)(x-1)} = \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x-1}$$

Άρα

$$I_1 = \int_0^{-1} \frac{5x+4}{x^2+x-2} dx = \int_0^{-1} \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x-1} dx = 2 \int_0^{-1} \frac{1}{x+2} dx + 3 \int_0^{-1} \frac{1}{x-1} dx =$$

$$= 2 \left[\ln|x+2| \right]_0^{-1} + 3 \left[\ln|x-1| \right]_0^{-1} =$$

$$= 2 \left(\ln|\cancel{-1+2}| - \ln|0+2| \right) + 3 \left(\ln|\cancel{-1-1}| - \ln|\cancel{0-1}| \right) = -2\ln 2 + 3\ln 2 = \ln 2$$

$$\text{Επομένως } I_1 = \ln 2 \quad (2)$$

$$\text{Τελικά έχουμε } (1), (2) \Rightarrow I = \frac{3}{2} + \ln 2$$

31.21 2)

Κάνουμε την διαίρεση των πολυωνύμων

$$\begin{array}{r|l} \cancel{2x^2} - 3x + 5 & x-1 \\ -\cancel{2x^2} + 2x & 2x-1 \\ \hline -x+5 & \\ \underline{x-1} & \\ 4 & \end{array}$$

$$\text{Οπότε } 2x^2 - 3x + 5 = (2x-1)(x-1) + 4$$

Άρα

$$\int_0^{-1} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x-1} dx = \int_0^{-1} \frac{(2x-1)(x-1) + 4}{x-1} dx = \int_0^{-1} \frac{(2x-1) \cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} + \frac{4}{x-1} dx =$$

$$= \int_0^{-1} 2x-1 dx + 4 \int_0^{-1} \frac{1}{x-1} dx = \left[x^2 - x \right]_0^{-1} + 4 \left[\ln|x-1| \right]_0^{-1} =$$

$$= (-1)^2 - (-1) - (0^2 - 0) + 4\ln|\cancel{-1-1}| - 4\ln|\cancel{0-1}| =$$

$$= 2 + 4\ln 2 = 2 + \ln 16$$

31.21 3)

Κάνουμε την διαίρεση των πολυωνύμων

$$\begin{array}{r|l}
 \cancel{x^3} - 4x^2 - 9x + 36 & x + 3 \\
 \underline{-\cancel{x^3} - 3x^2} & x^2 - 7x + 12 \\
 -7\cancel{x^2} - 9x + 36 & \\
 \underline{7\cancel{x^2} + 21x} & \\
 12\cancel{x} + 36 & \\
 \underline{-12\cancel{x} - 36} & \\
 0 &
 \end{array}$$

Οπότε $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = (x^2 - 7x + 12)(x + 3)$

Άρα

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{x^3 - 4x^2 - 9x + 36}{x + 3} dx &= \int_0^1 \frac{(x^2 - 7x + 12)(\cancel{x + 3})}{\cancel{x + 3}} dx = \int_0^1 x^2 - 7x + 12 dx = \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 12x \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{7 \cdot 1^2}{2} + 12 \cdot 1 = \frac{1}{3} - \frac{7}{2} + 12 = \frac{53}{6}
 \end{aligned}$$

31.21 4)

Κάνουμε την διαίρεση των πολωνύμων

$$\begin{array}{r|l}
 \cancel{x^3} + 3x^2 + 2x + 1 & x + 1 \\
 \underline{-\cancel{x^3} - x^2} & x^2 + 2x \\
 2\cancel{x^2} + 2\cancel{x} + 1 & \\
 \underline{-2\cancel{x^2} - 2\cancel{x}} & \\
 1 &
 \end{array}$$

Οπότε $x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + 2x)(x + 1) + 1$

Άρα

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{x + 1} dx &= \int_0^1 \frac{(x^2 + 2x)(x + 1) + 1}{x + 1} dx = \\
 &= \int_0^1 \frac{(x^2 + 2x)(\cancel{x + 1})}{\cancel{x + 1}} dx + \int_0^1 \frac{1}{x + 1} dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 + [\ln|x + 1|]_0^1 = \\
 &= \frac{1}{3} + 1 + \ln|1 + 1| - \cancel{\ln|0 + 1|} = \frac{4}{3} + \ln 2
 \end{aligned}$$

31.21 5)

Κάνουμε την διαίρεση των πολωνύμων

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & x-2 \\
 \underline{-x^3+2x^2} & \\
 2x^2 & \\
 \underline{-2x^2+4x} & \\
 4x & \\
 \underline{-4x+8} & \\
 8 &
 \end{array}$$

$$\text{Οπότε } x^3 = (x^2 + 2x + 4)(x - 2) + 8$$

Άρα

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{x^3}{x-2} dx &= \int_0^1 \frac{(x^2 + 2x + 4)(x - 2) + 8}{x - 2} dx = \\
 &= \int_0^1 \frac{(x^2 + 2x + 4) \cancel{(x - 2)}}{\cancel{x - 2}} dx + \int_0^1 \frac{8}{x - 2} dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x \right]_0^1 + 8 [\ln|x - 2|]_0^1 = \\
 &= \frac{1}{3} + 1 + 4 + \ln|1 - 2| - 8 \ln|2 - 0| = \frac{16}{3} - 8 \ln 2
 \end{aligned}$$

31.21 6)

Κάνουμε την διαίρεση των πολυωνύμων

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - 5x^2 + x + 3 & x^2 - 3x + 2 \\
 \underline{-2x^3 + 6x^2 - 4x} & \\
 x^2 - 3x + 3 & \\
 \underline{x^2 + 3x - 2} & \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\text{Οπότε } 2x^3 - 5x^2 + x + 3 = (2x + 1)(x^2 - 3x + 2) + 1$$

Άρα αν I είναι το ζητούμενο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^0 \frac{2x^3 - 5x^2 + x + 3}{x^2 - 3x + 2} dx \Rightarrow I = \int_{-1}^0 \frac{(2x + 1)(x^2 - 3x + 2) + 1}{x^2 - 3x + 2} dx \Rightarrow \\
 &\Rightarrow I = \int_{-1}^0 \frac{(2x + 1) \cancel{(x^2 - 3x + 2)}}{\cancel{x^2 - 3x + 2}} dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx \Rightarrow \\
 &\Rightarrow I = \left[x^2 + x \right]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx \Rightarrow I = 0 + \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx \Rightarrow \\
 &\Rightarrow I = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \Delta=1, x_{1,2}=\frac{3\pm 1}{2} \begin{cases} x_1=\frac{3-1}{2}\Rightarrow x_1=1 \\ x_2=\frac{3+1}{2}\Rightarrow x_2=2 \end{cases} \\ \text{Είναι } \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} \end{array}$$

$$\text{Οπότε θα πρέπει να βρούμε τα } A \text{ και } B \text{ ώστε } \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

Έχουμε

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{(x-1)}\cancel{(x-2)} \frac{1}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x-2)}} = \cancel{(x-1)}(x-2) \frac{A}{\cancel{x-1}} + (x-1)\cancel{(x-2)} \frac{B}{\cancel{x-2}}$$

$$\Rightarrow 1 = A(x-2) + B(x-1) \Rightarrow 1 = Ax - 2A + Bx - B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = (A+B)x + (-2A-B) \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{λύνουμε το σύστημα}} \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

$$\text{Οπότε } \frac{1}{(x-1)(x-2)} = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

Άρα

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-3x+2} dx = \int_{-1}^0 -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} dx = -\int_{-1}^0 \frac{1}{x-1} dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{x-2} dx = \\ &= -\left[\ln|x-1|\right]_{-1}^0 + \left[\ln|x-2|\right]_{-1}^0 = \\ &= -\cancel{\ln|0-1|} + \ln|-1-1| + \ln|0-2| - \ln|-1-2| = \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3} \end{aligned}$$

31.21 7)

Κάνουμε την διαίρεση των πολυωνύμων

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-11x^2+17x-5 & x^2-5x+6 \\ \underline{-2x^3+10x^2-12x} & 2x-1 \\ \cancel{x^2}+\cancel{5x}-5 & \\ \underline{\cancel{x^2}-\cancel{5x}+6} & \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{Οπότε } 2x^3-11x^2+17x-5 = (2x-1)(x^2-5x+6)+1$$

Άρα αν I είναι το ζητούμενο ολοκλήρωμα έχουμε

$$I = \int_0^1 \frac{2x^3-11x^2+17x-5}{x^2-5x+6} dx \Rightarrow I = \int_0^1 \frac{(2x-1)(x^2-5x+6)+1}{x^2-5x+6} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{(2x-1)(\cancel{x^2-5x+6})}{\cancel{x^2-5x+6}} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \left[x^2 - x \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6} dx \Rightarrow I = 0 + \int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6} dx$$

$$\text{Είναι } \frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

$\Delta=1, x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5-1}{2} \Rightarrow x_1=2 \\ x_2 = \frac{5+1}{2} \Rightarrow x_2=3 \end{cases}$

Οπότε θα πρέπει να βρούμε τα A και B ώστε $\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$

Έχουμε

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{(x-2)}\cancel{(x-3)} \frac{1}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x-3)}} = \cancel{(x-2)}(x-3) \frac{A}{\cancel{x-2}} + (x-2)\cancel{(x-3)} \frac{B}{\cancel{x-3}}$$

$$\Rightarrow 1 = A(x-3) + B(x-2) \Rightarrow 1 = Ax - 3A + Bx - 2B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = (A+B)x + (-3A-2B) \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -3A-2B=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{λύνουμε το σύστημα}} \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

Οπότε $\frac{1}{(x-2)(x-3)} = -\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$

Άρα

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6} dx = \int_0^1 -\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} dx = -\int_0^1 \frac{1}{x-2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x-3} dx =$$

$$= -\left[\ln|x-2| \right]_0^1 + \left[\ln|x-3| \right]_0^1 =$$

$$= -\ln|\cancel{1-2}| + \ln|0-2| + \ln|1-3| - \ln|0-3| = \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}$$

31.21 8)

Κάνουμε την διαίρεση των πολυωνύμων

$$\begin{array}{r|l}
 \cancel{x^3} - 2x^2 - \cancel{x} + 4 & \frac{x^2 - 1}{x - 2} \\
 \hline
 -\cancel{x^3} + \cancel{x} & \\
 \hline
 -2x^2 + 4 & \\
 \hline
 \cancel{2x^2} - 2 & \\
 \hline
 2 &
 \end{array}$$

Οπότε $x^3 - 2x^2 - x + 4 = (x - 2)(x^2 - 1) + 2$

Άρα αν I είναι το ζητούμενο ολοκλήρωμα έχουμε

$$I = \int_2^4 \frac{x^3 - 2x^2 - x + 4}{x^2 - 1} dx \Rightarrow I = \int_2^4 \frac{(x - 2)(x^2 - 1) + 2}{x^2 - 1} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int_2^4 \frac{(x - 2) \cancel{(x^2 - 1)}}{\cancel{x^2 - 1}} dx + \int_2^4 \frac{2}{x^2 - 1} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^4 + \int_2^4 \frac{2}{x^2 - 1} dx \Rightarrow I = 2 + \int_2^4 \frac{2}{x^2 - 1} dx \quad (1)$$

Τώρα θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I_1 = \int_2^4 \frac{2}{x^2 - 1} dx$

Είναι $\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{2}{(x - 1)(x + 1)}$

Οπότε θα πρέπει να βρούμε τα A και B ώστε $\frac{2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$

Έχουμε

$$\frac{2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{(x - 1)} \cancel{(x + 1)} \frac{2}{\cancel{(x - 1)} \cancel{(x + 1)}} = \cancel{(x - 1)} (x + 1) \frac{A}{\cancel{x - 1}} + (x - 1) \cancel{(x + 1)} \frac{B}{\cancel{x + 1}}$$

$$\Rightarrow 2 = A(x + 1) + B(x - 1) \Rightarrow 4 = Ax + A + Bx - B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 = (A + B)x + (A - B) \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{λύουμε το σύστημα}} \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

Οπότε $\frac{2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$

Άρα

$$I_1 = \int_2^4 \frac{2}{x^2 - 1} dx = \int_2^4 \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} dx = \int_2^4 \frac{1}{x - 1} dx - \int_2^4 \frac{1}{x + 1} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\ln|x-1| \right]_2^4 - \left[\ln|x+1| \right]_2^4 = \\
&= \left(\ln|4-1| - \cancel{\ln|2-1|} \right) - \left(\ln|4+1| - \ln|2+1| \right) = \\
&= \ln 3 - \ln 5 + \ln 3 = \ln \frac{9}{5}
\end{aligned}$$

Επομένως $I_1 = \ln \frac{9}{5}$ (2)

Τελικά έχουμε

(1), (2) $\Rightarrow I = 2 + \ln \frac{9}{5}$

31.21 9)

Κάνουμε την διαίρεση των πολυωνύμων

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + x & x^2 - 1 \\
\underline{-x^3 + x} & x \\
2x &
\end{array}$$

Οπότε $x^3 + x = x(x^2 - 1) + 2x$

Άρα αν I είναι το ζητούμενο ολοκλήρωμα έχουμε

$$I = \int_2^4 \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} dx \Rightarrow I = \int_2^4 \frac{x(x^2 - 1) + 2x}{x^2 - 1} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int_2^4 \frac{\cancel{x(x^2 - 1)} + 2x}{\cancel{x^2 - 1}} dx + \int_2^4 \frac{2x}{x^2 - 1} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^4 + \left[\ln|x^2 - 1| \right]_2^4 \Rightarrow I = 8 - 2 + \ln 15 - \ln 3 \Rightarrow I = 6 + \ln 5$$

31.21 10)

Αν I είναι το ζητούμενο ολοκλήρωμα έχουμε

$$I = \int_2^3 \frac{(x+1)^3}{x^2 - x} dx \Rightarrow I = \int_2^3 \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - x} dx$$

Έτσι κάνουμε την διαίρεση των πολυωνύμων

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + 3x^2 + 3x + 1 & x^2 - x \\
\underline{-x^3 + x^2} & x + 4 \\
4x^2 + 3x + 1 & \\
\underline{-4x^2 + 4x} & \\
7x + 1 &
\end{array}$$

$$\text{Οπότε } x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+4)(x^2 - x) + 7x + 1$$

και άρα

$$I = \int_2^3 \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - x} dx \Rightarrow I = \int_2^3 \frac{(x+4)(x^2 - x) + 7x + 1}{x^2 - x} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int_2^3 \frac{(x+4) \cancel{(x^2 - x)}}{\cancel{x^2 - x}} dx + \int_2^3 \frac{7x + 1}{x^2 - x} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{x^2}{2} + 4x \right]_2^3 + \int_2^3 \frac{7x + 1}{x^2 - x} dx \Rightarrow I = \frac{13}{2} + \int_2^3 \frac{7x + 1}{x^2 - x} dx \quad (1)$$

$$\text{Τώρα θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα } I_1 = \int_2^3 \frac{7x + 1}{x^2 - x} dx$$

$$\text{Είναι } \frac{7x + 1}{x^2 - x} = \frac{7x + 1}{x(x-1)}$$

$$\text{Οπότε θα πρέπει να βρούμε τα } A \text{ και } B \text{ ώστε } \frac{7x + 1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

Έχουμε

$$\frac{7x + 1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{x(x-1)} \frac{7x + 1}{\cancel{x(x-1)}} = \cancel{x} (x-1) \frac{A}{\cancel{x}} + x \cancel{(x-1)} \frac{B}{\cancel{x-1}}$$

$$\Rightarrow 7x + 1 = A(x-1) + Bx \Rightarrow 7x + 1 = Ax - A + Bx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x + 1 = (A+B)x - A \Rightarrow \begin{cases} A+B=7 \\ -A=1 \end{cases} \xrightarrow{\text{λύνουμε το σύστημα}} \begin{cases} A=-1 \\ B=8 \end{cases}$$

$$\text{Οπότε } \frac{7x + 1}{x(x-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{8}{x-1}$$

Άρα

$$I_1 = I = \int_2^3 \frac{7x + 1}{x^2 - x} dx = \int_2^3 -\frac{1}{x} + \frac{8}{x-1} dx = -\int_2^3 \frac{1}{x} dx + 8 \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx =$$

$$= -[\ln|x|]_2^3 + 8[\ln|x-1|]_2^3 =$$

$$= -\ln|3| + \ln|2| + 8(\ln|3-1| - \ln|\cancel{2-1}|) =$$

$$= -\ln 3 + \ln 2 + 8\ln 2 = -\ln 3 + 9\ln 2$$

$$\text{Επομένως } I_1 = 9\ln 2 - \ln 3 \quad (2)$$

Τελικά έχουμε

$$(1), (2) \Rightarrow I = \frac{13}{2} + 9\ln 2 - \ln 3$$