

30.19 1)

α) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \left[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} (x + \sqrt{x^2 + 1})' = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}} \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι η $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ είναι αρχική της $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

β) Έχουμε ότι

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \xrightarrow{\alpha) \text{ ερώτημα}} g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + c$$

Ακόμη

$$g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + c \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=0} g(0) = \ln(0 + \sqrt{0^2 + 1}) + c \xrightarrow{g(0)=5} 5 = \ln 1 + c \Rightarrow c = 5$$

Οπότε τελικά είναι $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 5$

30.19 2)

α) Παρατηρούμε ότι

$$\left(e^x \eta \mu x - e^x \sigma \upsilon \nu x \right)' = e^x \eta \mu x + \cancel{e^x \sigma \upsilon \nu x} - \cancel{e^x \sigma \upsilon \nu x} + e^x \eta \mu x = \boxed{2e^x \eta \mu x}$$

που σημαίνει ότι η $F(x) = e^x \eta \mu x + e^x \sigma \upsilon \nu x$ είναι αρχική της $f(x) = 2e^x \eta \mu x$

β) Έχουμε ότι

$$g'(x) = 2e^x \eta \mu x \xrightarrow{\alpha) \text{ ερώτημα}} g(x) = e^x \eta \mu x - e^x \sigma \upsilon \nu x + c$$

Ακόμη

$$g(x) = e^x \eta \mu x - e^x \sigma \upsilon \nu x + c \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=0} e^0 \eta \mu 0 - e^0 \sigma \upsilon \nu 0 + c = 2 \Rightarrow -1 + c = 2 \Rightarrow c = 3$$

Οπότε τελικά είναι $g(x) = e^x \eta \mu x - e^x \sigma \upsilon \nu x + 3$

30.19 3)

α) Παρατηρούμε ότι

$$\left[-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} \right]' = -\frac{\cancel{2}x \cdot 4x - 4\sqrt{4-x^2}}{16x^2} = -\frac{-4x^2 - 4\sqrt{4-x^2}^2}{16x^2} =$$

$$= -\frac{-4x^2 - 4(4-x^2)}{16x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{\cancel{4x^2} - 16 + \cancel{4x^2}}{16x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{\cancel{16}}{16x^2\sqrt{4-x^2}} = \boxed{\frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}}$$

που σημαίνει ότι η $F(x) = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}$ είναι αρχική της $f(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

β) Έχουμε ότι

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}} \stackrel{\alpha) \text{ ερώτημα}}{\Rightarrow} g(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + c$$

Ακόμη

$$g(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + c \stackrel{\text{θέτουμε } x=2}{\Rightarrow} g(2) = \frac{\sqrt{4-2^2}}{4 \cdot 2} + c \stackrel{g(2)=7}{\Rightarrow} c = 7$$

$$\Rightarrow c = 7$$

Οπότε τελικά είναι $g(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + 7$