

26.5 1)

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) = -\eta\mu x$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x + 1$

Στο $x_0 = 0$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\eta\mu x + x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0^+} \frac{-\sigma\upsilon\nu x + 1}{1} = -1 + 1 = 0$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$ (οπότε δέχεται εφαπτόμενη στο $x_0 = 0$). Έτσι

$$f'(x) = \begin{cases} -\eta\mu x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ -\sigma\upsilon\nu x + 1, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \text{ και άρα } f''(x) = \begin{cases} -\sigma\upsilon\nu x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ \eta\mu x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

(Στο $x_0 = 0$ δεν μας ενδιαφέρει αν υπάρχει δεύτερη παράγωγος)

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$			-	+	
$f(x)$			σ.κ.		

Οπότε η f είναι

κοίλη στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ κυρτή στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και έχει σημείο καμπής στο $(0, f(0) = 1)$

26.5 2)

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) = -2x$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = 3x^2$

Στο $x_0 = 0$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2}{x} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{x} = 0$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$ (οπότε δέχεται εφαπτόμενη στο $x_0 = 0$). Έτσι

$$f'(x) = \begin{cases} -2x, & x < 0 \\ 3x^2, & x \geq 0 \end{cases} \text{ και άρα } f''(x) = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ 6x, & x \geq 0 \end{cases}$$

(Στο $x_0 = 0$ δεν μας ενδιαφέρει αν υπάρχει δεύτερη παράγωγος)

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-		+
$f(x)$		σ.κ.	

Οπότε η f είναι

κοίλη στο $(-\infty, 0]$ κυρτή στο $[0, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής στο $(0, f(0) = 0)$

26.5 3)

Για κάθε $x < 1$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 1$

Για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) = -2x + 4$

Στο $x_0 = 1$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - x + \cancel{3} - \cancel{3}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2 + 4x - 3}{x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x + 4}{1} = 2$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 2$ (οπότε δέχεται εφαπτόμενη στο $x_0 = 1$). Έτσι

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, & x < 1 \\ -2x + 4, & x \geq 1 \end{cases} \text{ και άρα } f''(x) = \begin{cases} 6x, & x < 1 \\ -2, & x \geq 1 \end{cases}$$

(Στο $x_0 = 1$ δεν μας ενδιαφέρει αν υπάρχει δεύτερη παράγωγος)

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	-
f(x)		σ.κ.		σ.κ.

Οπότε η f είναι

κοίλη στο $(-\infty, 0]$ κυρτή στο $[0, 1]$, κοίλη στο $[1, +\infty)$

και έχει σημείο καμπής

στο $(0, f(0) = 3)$

στο $(1, f(1) = 3)$

26.5 4)

Για κάθε $x < 2$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 6$

Για κάθε $x > 2$ είναι $f'(x) = -2x$

Στο $x_0 = 2$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 6x + 4}{x - 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 - 6}{1} = 6 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 4}{x - 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-2x}{1} = -4$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ (είναι όμως συνεχής). Έτσι

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6, & x < 2 \\ -2x, & x > 2 \end{cases} \text{ και άρα } f''(x) = \begin{cases} 6x, & x < 2 \\ -2, & x > 2 \end{cases}$$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	-
f(x)		σ.κ.		

Οπότε η f είναι

κοίλη στο $(-\infty, 0]$ κυρτή στο $[0, 2]$, κοίλη στο $[2, +\infty)$

και έχει σημείο καμπής

στο $(0, f(0) = 0)$

(στο $x_0 = 2$ δεν έχουμε σημείο καμπής επειδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη αλλά επειδή είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ το 2 το συμπεριλαμβάνουμε στα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη

26.5 5)

$$\text{Είναι } f(x) = |\eta\mu x| = \begin{cases} \eta\mu x, & x \in [0, \pi] \\ -\eta\mu x, & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}. \text{ Οπότε}$$

Για κάθε $x \in [0, \pi)$ είναι $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$

Για κάθε $x \in (\pi, 2\pi]$ είναι $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$

Στο $x_0 = \pi$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\eta\mu x - 0}{x - \pi} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow \pi^-} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1} = -1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-\eta\mu x - 0}{x - \pi} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow \pi^+} \frac{-\sigma\upsilon\nu x}{1} = 1$$

Άρα η f είναι δεν παραγωγίσιμη και στο $x_0 = \pi$ (είναι όμως συνεχής). Έτσι

$$f'(x) = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x, & x \in [0, \pi) \\ -\sigma\upsilon\nu x, & x \in (0, 2\pi] \end{cases} \text{ και άρα } f'(x) = \begin{cases} -\eta\mu x, & x \in [0, \pi) \\ \eta\mu x, & x \in (0, 2\pi] \end{cases}$$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	π	2π	$+\infty$
$f''(x)$		-	$\parallel$	-	
$f(x)$					

Οπότε η f (αφού είναι συνεχής στο $x_0 = \pi$, είναι κοίλη στο $[0, 2\pi]$)