

26.3 1)

- α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = 2xe^x + (x^2 + 1)e^x = (2x + x^2 + 1)e^x = (x+1)^2 e^x$$

$$f''(x) = 2(x-1)e^x + (x+1)^2 e^x = (x+1)e^x (2+x+1) = (x+1)(x+3)e^x$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον διπλανό

πίνακα (επειδή $e^x > 0$ το πρόσημο

καθορίζεται από το $(x+1)(x+3)$)

Δηλαδή η f είναι

κυρτή στο $(-\infty, -3]$, κοίλη στο $[-3, -1]$ και κυρτή στο $[-1, +\infty)$

και παρουσιάζει σημείο καμπής

στο $(-3, f(-3)) = (-3, 10e^{-3})$ και στο $(-1, f(-1)) = (-1, 2e^{-1})$

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+
f(x)					
		$\sigma.K.$		$\sigma.K.$	

- β) Η f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = -2\frac{e^x}{x^2} \quad \text{και} \quad f''(x) = -2\frac{x^2 e^x \left(-\frac{2}{x^3}\right) - 2xe^x}{x^4} = 4\frac{e^x(1+x)}{x^4}$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον

παρακάτω πίνακα (επειδή $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$

και $x^2 > 0$ το πρόσημο καθορίζεται από το $x+1$)

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+	+
f(x)	↖		σ.κ.	↗

Δηλαδή η f είναι

κοίλη στο $(-\infty, -1]$ κυρτή στο $[-1, 0)$ κυρτή στο $(0, +\infty)$

και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $\left(-1, f(-1) = e^{-1}\right)$ δηλαδή στο $\left(-1, \frac{1}{e^2}\right)$

26.3 2)

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = xe^x + e^x = e^x(x+1)$$

$$f''(x) = e^x(x+1) + e^x = e^x(x+2)$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω

πίνακα (επειδή $e^x > 0$ το πρόσημο καθορίζεται από το $x+2$)

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f(x)		$\sigma. \kappa.$	

Δηλαδή η f είναι

κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -1]$

κυρτή στο διάστημα $[1, +\infty)$,

και παρουσιάζει σημείο καμπής

στο $(1, f(1) = 1e^1 - 3e^1 + 12)$ δηλαδή στο $(1, 12 - 2e)$

26.3 3)

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = e^x + xe^x - 3e^x = xe^x - 2e^x = e^x(x-2)$$

$$f''(x) = e^x(x-2) + e^x = e^x[(x-2)+1] = e^x(x-1)$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα (επειδή $e^x > 0$ το πρόσημο καθορίζεται από το $x-1$)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
f(x)			σημείο καμπής		

Δηλαδή η f είναι

κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -1]$

κυρτή στο διάστημα $[1, +\infty)$,

και παρουσιάζει σημείο καμπής

στο $(1, f(1) = 1e^{1x} - 3e^1 + 12)$ δηλαδή στο $(1, 12 - 2e)$

26.3 4)

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = -\frac{2x}{2} e^{-\frac{x^2}{2}} = -x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f''(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} - x e^{-\frac{x^2}{2}} \left(-\frac{2x}{2} \right) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 - 1)$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα (επειδή $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ το πρόσημο καθορίζεται από το $x^2 - 1$)

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	0	+
f(x)			σημείο καμπής		σημείο καμπής	

Δηλαδή η f είναι

κυρτή στο διάστημα $(-\infty, -1]$

κοίλη στο διάστημα $[-1, 1]$

κυρτή στο διάστημα $[1, +\infty)$,

και παρουσιάζει σημείο καμπής

στο $\left(-1, f(-1) = e^{-\frac{(-1)^2}{2}}\right)$ δηλαδή στο $\left(-1, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ και

στο $\left(1, f(1) = e^{-\frac{1^2}{2}}\right)$ δηλαδή στο $\left(1, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

26.3 5)

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = (2x - 5)e^x + (x^2 - 5x + 6)e^x = (2x - 5 + x^2 - 5x + 6)e^x = (x^2 - 3x + 1)e^x$$

$$f''(x) = (2x - 3)e^x + (x^2 - 3x + 1)e^x = (2x - 3 + x^2 - 3x + 1)e^x = (x^2 - x - 2)e^x$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον διπλανό

πίνακα (επειδή $e^x > 0$ το πρόσημο

καθορίζεται από το $x^2 - x - 2$)

Δηλαδή η f είναι

x	$-\infty$	-1		2		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	0	+
f(x)			σ.κ.		σ.κ.	

κυρτή στο $(-\infty, -1]$, κοίλη στο $[-1, 2]$ και κυρτή στο $[2, +\infty)$

και παρουσιάζει σημείο καμπής

στο $(-1, f(-1)) = (-1, 12e^{-1})$ και στο $(2, f(2)) = (2, 0)$

26.3 6)

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = (2x-1)e^{-x} - (x^2-x+2)e^{-x} = (2x-1-x^2+x-2)e^{-x} = (-x^2+3x-3)e^{-x}$$

$$f''(x) = (-2x+3)e^{-x} - (-x^2+3x-3)e^{-x} = (-2x+3+x^2-3x+3)e^{-x} =$$

$$= (x^2-5x+6)e^{-x}$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον διπλανό

πίνακα (επειδή $e^x > 0$ το πρόσημο

καθορίζεται από το x^2-5x+6)

Δηλαδή η f είναι

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$			
$f''(x)$	+	0	-	0	+			
f(x)			$\sigma. \kappa.$			$\sigma. \kappa.$		

κυρτή στο $(-\infty, 2]$, κοίλη στο $[2, 3]$ και κυρτή στο $[3, +\infty)$

και παρουσιάζει σημείο καμπής

στο $(2, f(2)) = (2, 4e^{-2})$ και στο $(3, f(3)) = (3, 8e^{-3})$

26.3 7)

Η f είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ως πράξεις

παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = e^{\frac{x-4}{x}} \left(\frac{x-4}{x} \right)' = e^{\frac{x-4}{x}} \left(\frac{x-x+4}{x^2} \right) = 4 \frac{e^{\frac{x-4}{x}}}{x^2} \quad \text{και}$$

$$f''(x) = 4 \frac{e^{\frac{x-4}{x}} \cdot \cancel{x^2} - e^{\frac{x-4}{x}} \cdot 2x}{x^2} = 4 \frac{4e^{\frac{x-4}{x}} - e^{\frac{x-4}{x}} \cdot 2x}{x^2} = 4 \frac{2e^{\frac{x-4}{x}} (2-x)}{x^2}$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον

παρακάτω πίνακα (επειδή $e^{\frac{x-4}{x}} > 0$ και

$x^2 > 0$ το πρόσημο καθορίζεται από το $2-x$)

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	+	0	-
f(x)			$\sigma. \kappa.$	

Δηλαδή η f είναι

κυρτή στο $(-\infty, 0)$ κυρτή στο $(0, 2]$ κοίλη στο $[2, +\infty)$

και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $(2, f(2) = e^{-1})$ δηλαδή στο $(2, \frac{1}{e})$