

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

23.24 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 2}$, $x \in \mathbb{R}$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x) = \frac{e^x(e^x + 2) - (e^x - 1)e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{\cancel{e^{2x}} + 2e^x - \cancel{e^{2x}} + e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{3e^x}{(e^x + 2)^2} > 0, \text{ για κάθε}$$

$x \in \mathbb{R}$ οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα

$$\alpha < \beta \stackrel{h'}{\Rightarrow} h(\alpha) < h(\beta) \Rightarrow \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha + 2} < \frac{e^\beta - 1}{e^\beta + 2}$$

23.24 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = x + \frac{1}{x-1}$, $x \in (1, 2]$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + \cancel{1} - \cancel{1}}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Οπότε για κάθε $x \in (1, 2)$ είναι $h'(x) < 0$ οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, 2]$. Άρα

$$\boxed{\alpha < \beta} \stackrel{h'}{\Rightarrow} h(\alpha) > h(\beta) \Rightarrow \boxed{\alpha + \frac{1}{\alpha-1} > \beta + \frac{1}{\beta-1}}$$

23.24 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \frac{e^x + 5}{e^x + 3}$, $x \in \mathbb{R}$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x) = \frac{e^x(e^x + 3) - (e^x + 5)e^x}{(e^x + 3)^2} = \frac{\cancel{e^{2x}} + 3e^x - \cancel{e^{2x}} - 5e^x}{(e^x + 3)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x + 3)^2}$$

Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h'(x) < 0$ οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα

$$\boxed{\alpha > \beta} \stackrel{h'}{\Rightarrow} h(\alpha) < h(\beta) \Rightarrow \boxed{\frac{e^\alpha + 5}{e^\alpha + 3} < \frac{e^\beta + 5}{e^\beta + 3}}$$

23.24 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = \frac{-x \cos x - \sin x}{x^2}$

Επειδή $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \sin x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -x \cos x - \sin x < 0 \Rightarrow \frac{-x \cos x - \sin x}{x^2} < 0 \Rightarrow h'(x) < 0$$

οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Άρα

$$\boxed{\alpha > \beta} \stackrel{h'}{\Rightarrow} h(\alpha) < h(\beta) \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\alpha} < \frac{\sin \beta}{\beta}$$

23.24 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \frac{e^{\mu x}}{\sin x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \cancel{\sin x} - e^{\mu x} \cdot (-\eta \mu x)}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x} + \frac{\eta \mu x}{\sin x} \cdot \eta \mu x = \frac{1 + \eta \mu^2 x}{\sin^3 x}$$

Οπότε για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $h'(x) > 0$ οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Άρα

$$\boxed{\alpha < \beta} \stackrel{h'}{\Rightarrow} h(\alpha) < h(\beta) \Rightarrow \frac{e^{\mu \alpha}}{\sin \alpha} < \frac{e^{\mu \beta}}{\sin \beta}$$

23.24 6)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, $x > 1$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x) = \frac{e^x \cdot x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1) + 1}{x^2}$$

Για κάθε $x > 1$ είναι $x - 1 > 0 \Rightarrow e^x(x-1) > 0 \Rightarrow \frac{e^x(x-1) + 1}{x^2} > 0 \Rightarrow h'(x) > 0$ οπότε

η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$. Άρα

$$\boxed{\alpha > \beta} \stackrel{h'}{\Rightarrow} h(\alpha) > h(\beta) \Rightarrow \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} > \frac{e^{\beta} - 1}{\beta}$$

23.24 7)

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Είναι } h(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & x \leq 0 \\ \frac{x}{1+x}, & x > 0 \end{cases}$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με

$$h'(x) = \begin{cases} \frac{1-x-x(-1)}{1-x} & , x < 0 \\ \frac{1+x-x}{1+x} & , x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & , x < 0 \\ \frac{1}{1+x} & , x > 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\text{Όταν } x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow 1 - x > 0 \Rightarrow \frac{1}{1-x} > 0 \Rightarrow h'(x) > 0$$

$$\text{Όταν } x > 0 \Rightarrow 1 + x > 0 \Rightarrow \frac{1}{1+x} > 0 \Rightarrow h'(x) > 0$$

Οπότε για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι $h'(x) > 0$ και στο $x_0 = 0$ η h είναι συνεχής, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα

$$\boxed{\alpha > \beta} \xRightarrow{h'} h(\alpha) > h(\beta) \Rightarrow \boxed{\frac{\alpha}{1+|\alpha|} > \frac{\beta}{1+|\beta|}}$$