

23.13 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - \alpha$, $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3x^2 + 2$. Προφανώς είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1 – 1.

Επομένως η f (και άρα και η εξίσωση $x^3 + 2x = \alpha$) έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα

23.13 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1) + x - 4$, $x \in (1, +\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + 1.$$

Επειδή $x > 0$ θα είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1 – 1. Επομένως η f (και άρα και η εξίσωση $\ln(x-1) + x = 4$) έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα

23.13 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = 2\sin x + 3\eta\mu x - 6x$, $x \in \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = -2\eta\mu x + 3\sin x - 6$.

Επειδή $\sin x \leq 1$ και $\eta\mu x \leq 1$ θα είναι $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1 – 1. Επομένως η f (και άρα και η εξίσωση $2\sin x + 3\eta\mu x = 6x$) έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα

23.13 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = 2x + \alpha - \sqrt{2}\eta\mu\left(\frac{\alpha-x}{\sqrt{2}}\right)$, $x \in \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = 2 - \sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha-x}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 + \sin\left(\frac{\alpha-x}{\sqrt{2}}\right).$$

Επειδή $\sin\left(\frac{\alpha-x}{\sqrt{2}}\right) \geq -1$ θα είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1 – 1. Επομένως η f (και άρα και η εξίσωση

$2x = -\alpha + \sqrt{2}\eta\mu\left(\frac{\alpha-x}{\sqrt{2}}\right)$) έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα