

20.17 1)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 - 2x^3 + 30x^2 + x + 2$

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο $[-2, 0]$ και στο $[0, 2]$, ως πολυωνυμική
- $$\left. \begin{aligned} f(-2) &= (-2)^4 - 2(-2)^3 + 30(-2)^2 + (-2) - 2 = 148 > 0 \\ f(0) &= 0^4 - 2 \cdot 0^3 + 30 \cdot 0^2 + 0 - 2 = -2 < 0 \\ f(2) &= 2^4 - 2 \cdot 2^3 + 30 \cdot 2^2 + 2 - 2 = 120 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} f(-2)f(0) &< 0 \\ f(0)f(2) &< 0 \end{aligned}$$

Οπότε, από το **θεώρημα Bolzano**, η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση

$x^4 - 2x^3 + 30x^2 + x - 2 = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2, 0)$ και μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$, οπότε έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$

Υποθέτουμε ότι η f , έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$, τις ρ_1, ρ_2 και ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$

Η συνάρτηση f ως πολυωνυμική

είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και στο $[\rho_2, \rho_3]$

- είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) και στο (ρ_2, ρ_3)

$$\text{με } f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 60x + 1$$

- $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ και $f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$

τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$

Όμως η συνάρτηση f' ως πολυωνυμική

- είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$
- είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , με $f''(x) = 12x^2 - 12x + 60$
- $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$

Οπότε για τη συνάρτηση f' ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του **θεωρήματος Rolle**

και επομένως υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$ άτοπο, αφού

$$f''(x) = 12x^2 - 12x + 60 = 12(x^2 - x + 5) \neq 0, \text{ διότι } \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -19 < 0$$

Επομένως η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^4 - 2x^3 + 30x^2 + x + 2 = 0$, δεν μπορεί να έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$, και αφού έχει τουλάχιστον δύο ρίζες, συμπεραίνουμε ότι έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$

20.17 2)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 + x^2 - 8x + 3$

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, ως πολυωνυμική

- $$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^4 + 0^2 - 8 \cdot 0 + 3 = 3 > 0 \\ f(1) &= 1^4 + 1^2 - 8 \cdot 1 + 3 = -3 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0)f(1) < 0$$

Οπότε, από το **θεώρημα Bolzano**, η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση

$$x^4 + x^2 - 8x + 3 = 0, \text{ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα } (0, 1)$$

Επίσης, η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$, ως πολυωνυμική

- $$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1^4 + 1^2 - 8 \cdot 1 + 3 = -3 < 0 \\ f(2) &= 2^4 + 2^2 - 8 \cdot 2 + 3 = 7 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(1)f(2) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^4 + x^2 - 8x + 3 = 0$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$

Οπότε η εξίσωση $x^4 + x^2 - 8x + 3 = 0$, έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$

Τέλος η συνάρτηση f , ως πολυωνυμική, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = 4x^3 + 2x - 8$$

$$f''(x) = 12x^2 + 2$$

Προφανώς $f''(x) \neq 0$, οπότε αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν τρεις ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ τότε εν συντομία

θεώρημα Rolle στο $[\rho_1, \rho_2]$ υπάρχει ξ_1 με $f'(\xi_1) = 0$

θεώρημα Rolle στο $[\rho_2, \rho_3]$ υπάρχει ξ_2 με $f'(\xi_2) = 0$

θεώρημα Rolle στο $[\xi_1, \xi_2]$ για την f' υπάρχει ξ με $f''(\xi) = 0$ άτοπο

Οπότε

η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 8x + 3 = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$
η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 8x + 3 = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$
η εξίσωση $x^4 + x^2 - 8x + 3 = 0$, έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$

20.17 3)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 1$

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 0]$, ως πολυωνυμική
- $$\left. \begin{aligned} f(-1) &= (-1)^4 + (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - (-1) - 1 = 3 > 0 \\ f(0) &= 0^4 + 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 0 - 1 = -1 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-1)f(0) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$

Επίσης, η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, ως πολυωνυμική
- $$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^4 + 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 0 - 1 = -1 < 0 \\ f(1) &= 1^4 + 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 - 1 = 3 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0)f(1) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

Οπότε η εξίσωση $x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$, έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$

Τέλος η συνάρτηση f , ως πολυωνυμική, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 6x - 1$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6x + 6 = 6(2x^2 + x + 1)$$

Προφανώς $f''(x) \neq 0$, οπότε αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν τρεις ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ τότε εν συντομία

θεώρημα Rolle στο $[\rho_1, \rho_2]$ υπάρχει ξ_1 με $f'(\xi_1) = 0$

θεώρημα Rolle στο $[\rho_2, \rho_3]$ υπάρχει ξ_2 με $f'(\xi_2) = 0$

θεώρημα Rolle στο $[\xi_1, \xi_2]$ για την f' υπάρχει ξ με $f''(\xi) = 0$ άτοπο

Οπότε

η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$

η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$

η εξίσωση $x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$, έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$

20.17 4)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - \sin x$

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο διάστημα $[-\pi, 0]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- $$\left. \begin{aligned} f(-\pi) &= (-\pi)^2 - \sin(-\pi) = \pi^2 + 1 \\ f(0) &= 0^2 - \sin 0 = -1 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-\pi)f(0) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^2 - \sin x = 0$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-\pi, 0)$

Επίσης, η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^2 - \sin 0 = -1 < 0 \\ f(\pi) &= \pi^2 - \sin \pi = \pi^2 + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0)f(\pi) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^2 - \sin x = 0$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$

Οπότε η εξίσωση $x^2 - \sin x = 0$, έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$

Τέλος η συνάρτηση f , ως πολυωνυμική, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = 2x - \cos x$$

$$f''(x) = 2 - \sin x$$

Προφανώς $f''(x) \neq 0$, οπότε αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν τρεις ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ τότε εν συντομία

θεώρημα Rolle στο $[\rho_1, \rho_2]$ υπάρχει ξ_1 με $f'(\xi_1) = 0$

θεώρημα Rolle στο $[\rho_2, \rho_3]$ υπάρχει ξ_2 με $f'(\xi_2) = 0$

θεώρημα Rolle στο $[\xi_1, \xi_2]$ για την f' υπάρχει ξ με $f''(\xi) = 0$ άτοπο

Οπότε

η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \sin x = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$

η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \sin x = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$

η εξίσωση $x^2 - \sin x = 0$, έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$

20.17 5)

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$

Η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο διάστημα $[-\pi, 0]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $$\left. \begin{aligned} f(-\pi) &= (-\pi)^2 - (-\pi)\eta\mu(-\pi) - \sigma\upsilon\nu(-\pi) = \pi^2 + 1 \\ f(0) &= 0^2 - 0 \cdot \eta\mu 0 - \sigma\upsilon\nu 0 = -1 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-\pi)f(0) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^2 = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-\pi, 0)$

Επίσης, η συνάρτηση f

- είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$, ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0^2 - 0 \cdot \eta\mu 0 - \sigma\upsilon\nu 0 = -1 < 0 \\ f(\pi) &= \pi^2 - \pi\eta\mu\pi - \sigma\upsilon\nu\pi = \pi^2 + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0)f(\pi) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, η συνάρτηση f , άρα και η εξίσωση $x^2 = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$

Οπότε η εξίσωση $x^2 = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$

Τέλος η συνάρτηση f , ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = 2x - \cancel{\eta\mu x} - x\sigma\upsilon\nu x + \cancel{\eta\mu x} = 2x - x\sigma\upsilon\nu x = x(2 - \sigma\upsilon\nu x)$$

Προφανώς η εξίσωση $f'(x) = 0$, έχει μία μόνο ρίζα (την $x = 0$)

οπότε η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, έχει το πολύ δύο διαφορετικές ρίζες στο $\mathbb{R}$ (διότι αν είχε 3 ρίζες τότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ θα είχε 2 τουλάχιστον ρίζες)

Οπότε

$$\left. \begin{aligned} \text{η εξίσωση } f(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \text{ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο } \mathbb{R} \\ \text{η εξίσωση } f(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \text{ έχει το πολύ δύο ρίζες στο } \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

η εξίσωση $x^2 = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$