

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σελ. 145

A2. Θεωρία σελ. 76

A3. α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x \geq 0 \end{cases}$

τότε είναι $(f+g)(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δηλαδή

οι συναρτήσεις f και g δεν είναι συνεχείς στο $x_0 = 0$

η συνάρτηση $f+g$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

A4. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+3) - 2x(x^2-3)}{(x^2+3)^2} = \frac{2x^3+6x-2x^3+6x}{(x^2+3)^2} = \frac{12x}{(x^2+3)^2}$$

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

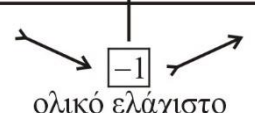
Τα πρόσημα της f' η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Άρα η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

και παρουσιάζει τοπικό (και ολικό) ελάχιστο στο $x_0 = 0$ ίσο με $f(0) = -1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

Τέλος η f δεν είναι 1-1 διότι π.χ. $f(-1) = f(1) = \frac{1^2-3}{1^2+3} = -\frac{2}{4}$

B2. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$. Οπότε η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Ομοίως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-3}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$. Οπότε η ευθεία $y=1$ είναι

οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f και στο $-\infty$.

Επειδή η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$ δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες

Ακόμη

στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 0]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [-1, 1)$$

στο διάστημα $A_2 = [0, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-1, 1)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [-1, 1)$$

B3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{12(x^2+3)^2 - 12x \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{12(x^2+3)(x^2+3-4x^2)}{(x^2+3)^2} = \\ &= \frac{12(x^2+3)(3-3x^2)}{(x^2+3)^2} = \frac{36(x^2+3)(1-x^2)}{(x^2+3)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1$$

Τα πρόσημα της f'' η κυρτότητα και οι θέσεις των σημείων καμπής της f φαίνονται στον διπλανό πίνακα

Άρα η f είναι

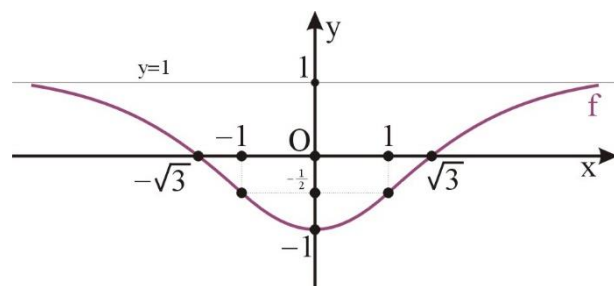
κοίλη στο $(-\infty, -1]$ και στο $[1, +\infty)$

κυρτή $[-1, 1]$

και έχει καμπής στα $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ και $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\curvearrowright$		$\curvearrowleft$	$\curvearrowright$	
		$\sigma.κ.$		$\sigma.κ.$	

B4. Η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε ότι $f(0) = 0^4 + \gamma \cdot 0 + f^2(0) \Rightarrow f(0) = f^2(0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f^2(0) - f(0) = 0 \Rightarrow f(0)[f(0) - 1] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 & (\text{απορρίπτεται διότι } f(x) \geq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}) \\ \text{ή} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Άρα τελικά $f(0) = 1$

Γ2. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ οπότε θα ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^4 + \alpha x + \beta) = 1 \Rightarrow 0^4 + \alpha \cdot 0 + \beta = 1 \Rightarrow \boxed{\beta = 1}$$

Ακόμη επειδή ισχύει $f(x) \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq f(0)$, η f παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ ολικό (άρα και τοπικό) ελάχιστο και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (άρα και στο $x_0 = 0$) σύμφωνα με το θεώρημα Fermat (το $x_0 = 0$ προφανώς είναι εσωτερικό σημείο) θα ισχύει

$$\boxed{f'(0) = 0}$$

Οπότε θα ισχύει

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= f'(0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^4 + \alpha x + \cancel{f} - \cancel{f}}{x} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{f}(x^3 + \alpha)}{\cancel{f}} = 0 \Rightarrow 0 + \alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= f'(0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + \gamma x + \cancel{f} - \cancel{f}}{x} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{f}(x + \gamma)}{\cancel{f}} = 0 \Rightarrow 0 + \gamma = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma = 0} \end{aligned}$$

Γ3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

$$\text{Με τις τιμές που βρήκαμε παραπάνω είναι } f(x) = \begin{cases} x^4 + 1, & x < 0 \\ x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

οπότε η παράγωγός της είναι

$$f'(x) = \begin{cases} 4x^3, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η f' είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ διότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = f'(0) = 0$$

$$\text{και παραγωγίσιμη στο } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \text{ με } f''(x) = \begin{cases} 12x^2, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$$

(δεν ενδιαφέρει να ελέγξουμε την παραγωγισιμότητα της f' στο $x_0 = 0$)

Παρατηρούμε ότι η f' είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με $f''(x) = 12x^2 > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ οπότε σύμφωνα με γνωστό θεώρημα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$

Ομοίως

η f' είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f''(x) = 2 > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ οπότε σύμφωνα με γνωστό}$$

θεώρημα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Άρα τελικά η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτόμενη της

Γ4. Επειδή για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) = x^2 + 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x^3 + 3x} \cdot f(x) dx &= \int_0^1 \sqrt{x^3 + 3x} \cdot (x^2 + 1) dx = \int_0^1 \sqrt{y} \cdot \frac{1}{3} dy = \end{aligned}$$

$\begin{aligned} &\text{θέτουμε } y = x^3 + 3x \Rightarrow dy = (3x^2 + 3)dx \Rightarrow \\ &dy = 3(x^2 + 1)dx \Rightarrow (x^2 + 1)dx = \frac{1}{3}dy \\ &\text{για } x=0 \Rightarrow y=0 \\ &\text{για } x=1 \Rightarrow y=4 \end{aligned}$

$$\frac{1}{3} \int_0^4 y^{\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{3} \left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{1}{3} \left[\frac{2\sqrt{y}^3}{3} \right]_0^4 = \frac{1}{3} \frac{2 \cdot 8}{3} = \frac{16}{9}$$

ΘΕΜΑ Δ

- Δ1. (i) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x) = -e^{2-x} - 1 < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 1 \stackrel{x>0}{>} 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Οπότε η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty)$$

- (ii) Επειδή $x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η ανίσωση ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$

$$f(\ln(x^2 + x + 1) + x^2 + 2) \geq e^x + x - 2 \quad \begin{matrix} f(2-x)=e^x-(2-x)=e^x+x-2 \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow f(\ln(x^2 + x + 1) + x^2 + 2) \geq f(2-x) \quad \begin{matrix} f: \nearrow \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + x + 1) + x^2 + 2 \leq 2 - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + x + 1) + x^2 + x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + x + 1) + x^2 + x - 1 \leq -1 \quad \begin{matrix} x^2+x+1>0 \\ g(x^2+x+1)=\ln(x^2+x+1)+x^2+x-1 \\ g(1)=-1 \\ \Leftrightarrow \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow g(x^2 + x + 1) \leq g(1) \quad \begin{matrix} g: \nearrow \\ \Leftrightarrow \end{matrix} x^2 + x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + x \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \in [-1, 0]}$$

- Δ2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = e^{2-1} - 1 = e - 1 > 0 \\ f(2) = e^{2-2} - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0$$

Οπότε από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\boxed{x_0 \in (1, 2)}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

Όμως

$$\boxed{f(x_0) = 0} \Leftrightarrow e^{2-x_0} - x_0 = 0 \Leftrightarrow e^{2-x_0} = x_0 \Leftrightarrow \ln e^{2-x_0} = \ln x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - x_0 = \ln x_0 \Leftrightarrow \ln x_0 + x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{g(x_0) = 0}$$

που σημαίνει ότι το σημείο $(x_0, 0)$, του άξονα $x'x$ είναι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων f και g

Μένει να αποδείξουμε ότι το παραπάνω σημείο είναι και το μοναδικό

Για αυτό

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ με $h'(x) = f'(x) - g'(x) \stackrel{\substack{f'(x)<0 \\ g'(x)>0}}{\Rightarrow} h'(x) < 0$

οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$, άρα και 1-1

οπότε το κοινό τους σημείο $(x_0, 0)$ είναι μοναδικό

Δ3. Καταρχήν είναι $g(x_0) = 0 \Rightarrow \ln x_0 + x_0 - 2 = 0 \Rightarrow \ln x_0 = 2 - x_0$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \int_1^{x_0} [g(x) + x + 1] dx & \stackrel{g(x)=\ln x+x+2}{=} \int_1^{x_0} [\ln x + x - 2 + x + 1] dx = \int_1^{x_0} [\ln x + 2x - 1] dx = \\ & = \int_1^{x_0} (x)' (\ln x + 2x - 1) dx \stackrel{\text{παραγοντική ολοκλήρωση}}{=} \left[x (\ln x + 2x - 1) \right]_1^{x_0} - \int_1^{x_0} x (\ln x + 2x - 1)' dx = \\ & = x_0 (\ln x_0 + 2x_0 - 1) - \left[1 (\ln 1 + 2 \cdot 1 - 1) \right] - \int_1^{x_0} x \left(\frac{1}{x} + 2 \right) dx = \\ & = x_0 \ln x_0 + 2x_0^2 - x_0 - 1 - \int_1^{x_0} 1 + 2x dx = x_0 \ln x_0 + 2x_0^2 - x_0 - 1 - \left[x + x^2 \right]_1^{x_0} = \\ & = x_0 \ln x_0 + 2x_0^2 - x_0 - 1 - (x_0 + x_0^2 - 2) = x_0 \ln x_0 + 2x_0^2 - x_0 - 1 - x_0 - x_0^2 + 2 = \\ & = x_0 \ln x_0 + x_0^2 - 2x_0 + 1 \stackrel{\ln x_0 = 2 - x_0}{=} x_0 (2 - x_0) + x_0^2 - 2x_0 + 1 = \\ & = \cancel{2x_0} - \cancel{x_0^2} + \cancel{x_0^2} - \cancel{2x_0} + 1 = 1 \end{aligned}$$

Δ4. Καταρχήν είναι $f(x_0) = 0 \Rightarrow e^{2-x_0} - x_0 = 0 \Rightarrow e^{2-x_0} = x_0$

Στο ερώτημα Δ2 είδαμε ότι η f έχει ρίζα $x_0 \in (1, 2)$ (η οποία είναι και μοναδική διότι η f είναι γνησίως φθίνουσα). Κατά συνέπεια το ζητούμενο εμβαδό E είναι

$$E = \int_{x_0}^2 |f(x)| dx$$

Ακόμη επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in (x_0, 2)$ θα είναι

$$x > x_0 \stackrel{f \searrow}{\Rightarrow} f(x) < f(x_0) \stackrel{f(x_0)=0}{\Rightarrow} f(x) < 0. \text{ Οπότε}$$

$$\begin{aligned} E = \int_{x_0}^2 |f(x)| dx & \stackrel{f(x)<0}{=} \int_{x_0}^2 -f(x) dx \stackrel{f(x)=e^{2-x}-x}{=} \int_{x_0}^2 x - e^{2-x} dx = \left[\frac{x^2}{2} + e^{2-x} \right]_{x_0}^2 = \\ & = \frac{2^2}{2} + e^{2-2} - \left(\frac{x_0^2}{2} + e^{2-x_0} \right) = 2 + 1 - \frac{x_0^2}{2} - e^{2-x_0} \stackrel{e^{2-x_0}=x_0}{=} 3 - \frac{x_0^2}{2} - x_0 = \frac{6 - x_0^2 - 2x_0}{2} \end{aligned}$$