

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ 36.99 (2001 – 3ο)

α) Έστω ότι η f έχει ακρότατο στο x_0 . Τότε

επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και προφανώς το x_0 είναι εσωτερικό σημείο, σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat θα είναι $f'(x_0) = 0$

Όμως

$$\begin{aligned} f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) &= x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \quad \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} \\ \Rightarrow 3f^2(x)f'(x) + 2\beta f(x)f'(x) + \gamma f'(x) &= 3x^2 - 4x + 6 \quad \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} \\ \Rightarrow 3f^2(x_0)f'(x_0) + 2\beta f(x_0)f'(x_0) + \gamma f'(x_0) &= 3x_0^2 - 4x_0 + 6 \quad \xrightarrow{f'(x_0)=0} \\ \Rightarrow 0 &= 3x_0^2 - 4x_0 + 6 \quad \text{άτοπο} \end{aligned}$$

διότι το παραπάνω τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = 14 - 72 < 0$

β) $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \quad \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3f^2(x)f'(x) + 2\beta f(x)f'(x) + \gamma f'(x) &= 3x^2 - 4x + 6 \Rightarrow \\ \Rightarrow f'(x)[3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma] &= 3x^2 - 4x + 6 \quad (1) \end{aligned}$$

Είναι

$3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma > 0$ διότι το τριώνυμο $3y^2 + 2\beta y + \gamma$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 4\beta^2 - 12\gamma = 4(\beta^2 - 3\gamma) \stackrel{\beta^2 < 3\gamma}{<} 0$$

και $3x^2 - 4x + 6 > 0$ διότι το τριώνυμο $3x^2 - 4x + 6$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 16 - 72 < 0$

$$\text{Οπότε } (1) \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 4x + 6}{3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma} \quad \xrightarrow{\substack{3x^2 - 4x + 6 > 0 \\ 3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma > 0}} f'(x) > 0$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα

γ) Είναι

$$\begin{aligned} f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) &= x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \quad \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=0} \\ \Rightarrow f^3(0) + \beta f^2(0) + \gamma f(0) &= 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 - 1 \Rightarrow f(0)[f^2(0) + \beta f(0) + \gamma] = -1 \quad (2) \end{aligned}$$

Όμως $f^2(0) + \beta f(0) + \gamma > 0$ διότι το τριώνυμο $y^2 + \beta y + \gamma$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\gamma = \beta^2 - 3\gamma - \gamma \stackrel{\substack{\beta^2 < 3\gamma \Rightarrow \beta^2 - 3\gamma < 0 \\ \beta^2 < 3\gamma \Rightarrow \gamma > \frac{\beta^2}{3} \Rightarrow \gamma > 0 \Rightarrow -\gamma < 0}}{<} 0$$

$$\text{Οπότε } (2) \Rightarrow f(0) = \frac{-1}{f^2(0) + \beta f(0) + \gamma} \quad \xrightarrow{f^2(0) + \beta f(0) + \gamma > 0} \boxed{f(0) < 0}$$

Ακόμη

$$\begin{aligned} f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) &= x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \quad \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=1} \\ \Rightarrow f^3(1) + \beta f^2(1) + \gamma f(1) &= 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 1 \Rightarrow f(1)[f^2(1) + \beta f(1) + \gamma] = 4 \quad (3) \end{aligned}$$

Ομοίως με πριν είναι $f^2(1) + \beta f(1) + \gamma > 0$ διότι το τριώνυμο $y^2 + \beta y + \gamma$ έχει διακρίνουσα $\Delta < 0$

$$\text{Οπότε } (3) \Rightarrow f(1) = \frac{4}{f^2(1) + \beta f(1) + \gamma} \quad \xrightarrow{f^2(1) + \beta f(1) + \gamma > 0} \boxed{f(1) > 0}$$

Έτσι η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) < 0 \\ f(1) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$$

Οπότε , σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** , η εξίσωση $f(x)=0$ στο ανοιχτό διάστημα $(0,1)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα η οποία επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και $1-1$ θα είναι μοναδική