

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ 36.98 (2001 – 2ο)

α) Αφού η f είναι συνεχής, θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 3$ που σημαίνει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} (\alpha x^2) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - e^{x-3}}{x-3} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-e^{x-3}}{1} = -1$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{9}$$

β) Για $x > 3$ είναι

$$f'(x) = \left(\frac{1 - e^{x-3}}{x-3} \right)' = \frac{e^{x-3}(x-3) - (1 - e^{x-3})}{(x-3)^2} = \frac{e^{x-3}(x-3) + e^{x-3} - 1}{(x-3)^2}$$

οπότε

$$f'(4) = \frac{e^{4-3}(4-3) + e^{4-3} - 1}{(4-3)^2} = \frac{e + e - 1}{1} = 2e - 1$$

$$\text{και ακόμη είναι } f(4) = \frac{1 - e^{4-3}}{4-3} = 1 - e$$

Επομένως η εφαπτόμενη έχει εξίσωση

$$y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Rightarrow y - (1 - e) = (2e - 1)(x - 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 1 + e = (2e - 1)x - 8e + 4 \Rightarrow y = (2e - 1)x - 9e + 5$$

γ) Για $x < 3$ είναι $f(x) = -\frac{1}{9}x^2$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_1^2 |f(x)| dx = \int_1^2 \left| -\frac{1}{9}x^2 \right| dx = \int_1^2 \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{1}{9} \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{9} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{1}{9} \left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) =$$

$$= \frac{1}{9} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{27}$$