

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (0,1)$ τέτοιος ώστε

$$f(\xi) = 3$$

Πράγματι,

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 2 \\ f(1) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) < 3 < f(1)$$

Οπότε, σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών**, υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi \in (0,1) \text{ τέτοιο ώστε } f(\xi) = 3$$

Επειδή ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως

αύξουσα στο $[0,1]$, άρα και 1 – 1 οπότε το ξ αυτό είναι μοναδικό

β) Έχουμε ότι

$$\left. \begin{array}{l} 0 < \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) < f(1) \\ 0 < \frac{2}{5} < 1 \Rightarrow f(0) < f\left(\frac{2}{5}\right) < f(1) \\ 0 < \frac{3}{5} < 1 \Rightarrow f(0) < f\left(\frac{3}{5}\right) < f(1) \\ 0 < \frac{4}{5} < 1 \Rightarrow f(0) < f\left(\frac{4}{5}\right) < f(1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{προσθέτουμε κατά μέλη} \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow 4f(0) \leq f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) < 4f(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0) < \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} < f(1)$$

Οπότε, σύμφωνα με το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών**, υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$$

γ) Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$,

είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει $x_2 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε

$$f'(x_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \stackrel{f(0)=2}{\stackrel{f(1)=4}{\Rightarrow}} f'(x_2) = \frac{4 - 2}{1 - 0} \Rightarrow f'(x_2) = 2$$

που σημαίνει ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = f'(x_2) = 2$ και άρα είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$