

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{42x}{\sqrt{x^2+16} + \sqrt{x^2+9}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{42x}{|x|\sqrt{1+\frac{16}{x^2}} + |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{42\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{16}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{42}{1+1} = 21$$

Άρα η ευθεία $y = 21$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{42x}{\sqrt{x^2+16} + \sqrt{x^2+9}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{42x}{|x|\sqrt{1+\frac{16}{x^2}} + |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{42\cancel{x}}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1+\frac{16}{x^2}} - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = \frac{42}{-1-1} = -21$$

Άρα η ευθεία $y = -21$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 42 \frac{\sqrt{x^2+16} + \sqrt{x^2+9} - x \left(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x^2+16}} + \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x^2+9}} \right)}{(\sqrt{x^2+16} + \sqrt{x^2+9})^2} =$$

$$= 42 \frac{\sqrt{x^2+16} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}} + \sqrt{x^2+9} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{(\sqrt{x^2+16} + \sqrt{x^2+9})^2} =$$

$$= 42 \frac{\frac{\cancel{x^2}+16-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+16}} + \frac{\cancel{x^2}+9-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+9}}}{(\sqrt{x^2+16} + \sqrt{x^2+9})^2} = 42 \frac{\frac{16}{\sqrt{x^2+16}} + \frac{9}{\sqrt{x^2+9}}}{(\sqrt{x^2+16} + \sqrt{x^2+9})^2} > 0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα το σύνολο τιμών της είναι

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \stackrel{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -21, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 21}{=} (-21, 21)$$

Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-21 < f(x) < 21 \Rightarrow |f(x)| < 21$

