

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Δ 36.95

α) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = x + \ln x$, $x > 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow h'(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Οπότε, έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Είναι

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{x=f(x)+\ln f(x)} f(x_1) + \ln f(x_1) < f(x_2) + \ln f(x_2) \xRightarrow{h(x)=f(x)+\ln f(x)}$$

$$\Rightarrow h(f(x_1)) < h(f(x_2)) \xRightarrow{h \nearrow, f(x) > 0} f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

β) Είναι

$$f(x) + \ln f(x) = x \xRightarrow{x=1} f(1) + \ln f(1) = 1 \xRightarrow{h(x)=x+\ln x} h(f(1)) = h(1) \xRightarrow{h \nearrow \Rightarrow h:1-1}$$

$$\Rightarrow f(1) = 1$$

γ) Έχουμε $f(x) + \ln f(x) = x \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f'(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x)f'(x) + f'(x) = f(x) \Rightarrow f'(x)[f(x) + 1] = f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) + 1}$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) + 1} \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f''(x) = \frac{f'(x)[f(x) + 1] - f(x)f'(x)}{[f(x) + 1]^2}$$

$$\xRightarrow{f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)+1}} f''(x) = \frac{\frac{f(x)}{f(x)+1}[f(x)+1] - f(x)\frac{f(x)}{f(x)+1}}{[f(x)+1]^2} =$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{\cancel{f^2(x)} + f(x) - \cancel{f^2(x)}}{[f(x)+1]^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{f(x)}{[f(x)+1]^3} \xRightarrow{f(x) > 0}$$

$$\Rightarrow f''(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω σε όλο το $\mathbb{R}$

δ) Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1 επομένως είναι αντιστρέψιμη

$$\begin{aligned} f(x) + \ln f(x) &= x \quad \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f^{-1}(x)} f(f^{-1}(x)) + \ln f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x) \\ f(f^{-1}(x)) &= x \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = x + \ln x \quad (1) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 f(x) dx \quad \begin{array}{l} \text{θέτουμε } y=f(x) \Rightarrow x=f^{-1}(y) \xRightarrow{(1)} x=y+\ln y \Rightarrow dx=\left(1+\frac{1}{y}\right)dy \\ \text{για } x=0 \Rightarrow y=f(0) \\ \text{για } x=1 \Rightarrow y=f(1) \end{array} \quad \overset{\beta) \text{ ερώτημα}}{=} \int_{f(0)}^1 y \left(1+\frac{1}{y}\right) dy$$

$$= \int_{f(0)}^1 (y+1) dy = \left[\frac{y^2}{2} + y \right]_{f(0)}^1 = \left(\frac{1^2}{2} + 1 \right) - \left(\frac{f^2(0)}{2} + f(0) \right) =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{f^2(0)}{2} - f(0) = -\frac{f^2(0) + 2f(0) - 3}{2}$$