

α) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = e^x + 4x^3 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη με

$$h'(x) = e^x + 12x^2 + 2 > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad e^{f(x_1)} + 4f^3(x_1) + 2f(x_1) < e^{f(x_2)} + 4f^3(x_2) + 2f(x_2)$$

$$h(x) = e^x + 4x^3 + 2x \quad \Rightarrow \quad h(f(x_1)) < h(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα θα είναι και 1-1 άρα θα είναι αντιστρέψιμη

Ακόμη

$$e^{f(x)} + 4f^3(x) + 2f(x) = x \quad \text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f^{-1}(x)$$

$$e^{f(f^{-1}(x))} + 4f^3(f^{-1}(x)) + 2f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = e^x + 4x^3 + 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η f^{-1} είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη με

$$(f^{-1})'(x) = e^x + 12x^2 + 2$$

$$(f^{-1})''(x) = e^x + 24x$$

$$(f^{-1})'''(x) = e^x + 24 > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η $(f^{-1})''$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα το σύνολο τιμών της είναι το

$$(f^{-1})''(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (f^{-1})''(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} (f^{-1})''(x) \right) =$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 24x), \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 24x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

Επομένως $0 \in (f^{-1})''(\mathbb{R})$, άρα υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ με $f''(x_1) = 0$

και

$$\text{για κάθε } x < x_1 \Rightarrow (f^{-1})''(x) < (f^{-1})''(x_1) \Rightarrow (f^{-1})''(x) < 0$$

$$\text{για κάθε } x > x_1 \Rightarrow (f^{-1})''(x) > (f^{-1})''(x_1) \Rightarrow (f^{-1})''(x) > 0$$

Τα πρόσημα της $(f^{-1})''(x)$, και η κυρτότητα της f^{-1} φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$(f^{-1})''(x)$	-	0	+
$f^{-1}(x)$		σημείο καμπής	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f^{-1} παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής

γ) Έχουμε ότι

$$f^{-1}(0) = e^0 + 4 \cdot 0^3 + 2 \cdot 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 1 \Rightarrow f(1) = 0$$

$$f^{-1}(1) = e^1 + 4 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = e + 6 \Rightarrow f(e + 6) = 1$$

$\delta) \int_1^{e+6} f(x) dx$
 $\begin{array}{l} \text{θέτουμε } y=f(x) \Rightarrow x=f^{-1}(y) \Rightarrow x=e^y+4y^3+2y \Rightarrow dx=(e^y+12y^2+2)dy \\ \text{για } x=1 \Rightarrow y=f^{-1}(1) \quad \text{ερώτημα γ)} \\ \text{για } x=e+6 \Rightarrow y=f^{-1}(e+6) \quad \text{ερώτημα γ)} \end{array}$

$$= \int_0^1 y(e^y + 12y^2 + 2) dy = \int_0^1 (ye^y + 12y^3 + 2y) dy =$$

$$= \int_0^1 ye^y dy + \int_0^1 12y^3 dy + \int_0^1 2y dy = \int_0^1 y(e^y)' dy + \left[\frac{3}{4} y^4 \right]_0^1 + \left[y^2 \right]_0^1 =$$

$$= \int_0^1 y(e^y)' dy + \left[\frac{3}{4} y^4 \right]_0^1 + \left[y^2 \right]_0^1 = \left[ye^y \right]_0^1 - \int_0^1 e^y dy + 3 \cdot 1^4 + 1^2 =$$

$$= 1 \cdot e^1 - \left[e^y \right]_0^1 + 3 \cdot 1^4 + 1^2 = e - e^0 + 3 + 1 = 5$$