

α) Επειδή $f^4(x)+1 > 0$ θα είναι

$$f'(x) = \frac{1}{f^4(x)+1} > 0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1

β) Αφού η f είναι 1-1, θα είναι και αντιστρέψιμη με $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ (1)

, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Οπότε

$$f'(x) = \frac{1}{f^4(x)+1} \Rightarrow f'(x)f^4(x) + f'(x) = 1 \Rightarrow 5f'(x)f^4(x) + 5f'(x) = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [f^5(x) + 5f(x)]' = (5x)' \Rightarrow f^5(x) + 5f(x) = 5x + c \quad (2)$$

Όμως

$$(2) \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } 0} f^5(0) + 5f(0) = 5 \cdot 0 + c \xrightarrow{f(0)=0} c = 0 \quad (3)$$

$$(2) \xrightarrow{(3)} f^5(x) + 5f(x) = 5x \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f^{-1}(x)} f^5(f^{-1}(x)) + 5f(f^{-1}(x)) = 5f^{-1}(x) \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{(1)} x^5 + 5x = 5f^{-1}(x) \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x^5}{5} + x}$$

γ) Έχουμε $f'(x) = \frac{1}{f^4(x)+1}$ και άρα η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις

παραγωγίσιμων

$$f''(x) = -\frac{4f^3(x)f'(x)}{[f^4(x)+1]^2} =$$

Επειδή $f'(x) > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα και $f(0) = 0$ θα είναι

$f(x) < 0$ για κάθε $x < 0$ και

$f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$

Τα πρόσημα της f'' , η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f(x)$		σημείο καμπής	

Από τον παραπάνω πίνακα, προκύπτει ότι η f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής το $(0, f(0)) = (0, 0)$

δ) Έχουμε ισοδύναμα

$$f(2x+1) = x \Leftrightarrow f^{-1}(f(2x+1)) = f^{-1}(x) \stackrel{\beta) \text{ ερώτημα}}{\Leftrightarrow} 2x+1 = \frac{x^5}{5} + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x+5 = x^5 \Leftrightarrow x^5 - 5x - 5 = 0$$

Οπότε αρκεί να βρεθεί το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $x^5 - 5x - 5 = 0$

Θέτουμε $h(x) = x^5 - 5x - 5$, $x \in \mathbb{R}$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1) = 5(x^2 + 1)(x^2 - 1)$

Είναι $h(-1) = -1$, $h(1) = -9$

Τα πρόσημα της h' , η μονοτονία και τα ακρότατα της h , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1		1	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ -1	$\searrow$	-9	$\nearrow +\infty$

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι

$h((-\infty, -1]) = (-\infty, -1]$, άρα η h δεν έχει ρίζα στο $(-\infty, -1]$

$h([-1, 1]) = [-9, -1]$, άρα η h δεν έχει ρίζα στο $[-1, 1]$

$h([1, +\infty)) = [-9, +\infty)$, άρα η h έχει ρίζα στο $[1, +\infty)$ και επειδή είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική

Τελικά η εξίσωση $h(x) = 0$ και άρα και η εξίσωση $f(2x+1) = x$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα