

α) Καταρχήν έχουμε

$$\int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 g(t) dt \Rightarrow F(2) - F(0) = G(2) - G(0) \stackrel{F(0)=G(2)=0}{\Rightarrow} \boxed{F(2) = -G(0)} \quad (1)$$

Ακόμη

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = F(x) - G(x)$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$, ως πράξεις συνεχών

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 2)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων με $h'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x)$ (2)

$$h(0) = F(0) - G(0) \stackrel{F(0)=0}{=} 0 - G(0) = -G(0)$$

$$h(2) = F(2) - G(2) \stackrel{G(2)=0}{=} F(2) \stackrel{(1)}{=} -G(0)$$

$$\text{Άρα } h(0) = h(2)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) \stackrel{(2)}{=} 0 \Rightarrow f(\xi) - g(\xi) = 0 \Rightarrow \boxed{f(\xi) = g(\xi)}$$

Ακόμη

Θεωρούμε την συνάρτηση φ με $\varphi(x) = f(x) - g(x)$

Επειδή $f(\xi) = g(\xi) \Rightarrow \varphi(\xi) = 0$. Άρα η φ έχει μία τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$

Ακόμη

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$\left. \begin{array}{l} x_1 < x_2 \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2) \\ x_1 < x_2 \stackrel{g \searrow}{\Rightarrow} g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow -g(x_1) < -g(x_2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{προσθέτουμε κατά μέλη} \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$f(x_1) - g(x_1) < f(x_2) - g(x_2) \Rightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα και άρα 1-1

Άρα η φ έχει μία ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$

Επομένως οι C_f και C_g τέμνονται σε μοναδικό σημείο του διαστήματος $(0, 2)$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση w με

$$w(x) = F(x) + G(2-x) - x^2 + 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Επειδή $F(x) + G(2-x) \geq x^2 - 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι

$$w(x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Ακόμη

Η w είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$w'(x) = f(x) + g(2-x)(2-x)' - 2x + 2 \Rightarrow$$

$$w'(x) = f(x) - g(2-x) - 2x + 2 \quad (3)$$

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$w(0) = F(0) + G(2) - 0^2 + 2 \cdot 0 \stackrel{F(0)=G(2)=0}{\Rightarrow} w(0) = 0 \quad (4)$$

$$w(2) = F(2) + G(0) - 2^2 + 2 \cdot 2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} w(2) = 0 \quad (5)$$

Επειδή $w(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ από τις (4) και (5) προκύπτει ότι

$$w(x) \geq w(0) \text{ και } w(x) \geq w(2), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η w στο $x = 0$ και στο $x = 2$, παρουσιάζει ακρότατο (ελάχιστο) και επειδή είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα είναι

$$w'(0) = 0 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} f(0) - g(2-0) - 2 \cdot 0 + 2 = 0 \Rightarrow f(0) - g(2) + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(2) - f(0) = 2 \quad (6)$$

και

$$w'(2) = 0 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} f(2) - g(2-2) - 2 \cdot 2 + 2 = 0 \Rightarrow f(2) - g(0) - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(2) - g(0) = 2 \quad (7)$$

$$(6), (7) \Rightarrow f(2) - g(0) = g(2) - f(0) \Rightarrow \boxed{f(0) + f(2) = g(0) + g(2)}$$

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση H με

$$H(x) = f(x) - g(2-x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι

$$H(0) = f(0) - g(2)$$

$$\begin{aligned}
 H(2) &= f(2) - g(0) \stackrel{f(0)+f(2)=g(0)+g(2) \Rightarrow f(2)-g(0)=g(2)-f(0)}{=} g(2) - f(0) = \\
 &= -[f(0) - g(2)]
 \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε } H(0) \cdot H(2) = -[f(0) - g(2)]^2 \leq 0 \quad (8)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

i) Αν $\underline{H(0)=0}$ τότε ο αριθμός $x_1 = 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$\begin{aligned}
 H(x) = 0 &\Leftrightarrow f(x) = g(2-x) \text{ και άρα υπάρχει } x_1 = 0 \in [0, 2] \text{ τέτοιο ώστε} \\
 f(x_1) &= g(2-x_1)
 \end{aligned}$$

ii) Αν $\underline{H(2)=0}$ τότε ο αριθμός $x_1 = 2$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$\begin{aligned}
 H(x) = 0 &\Leftrightarrow f(x) = g(2-x) \text{ και άρα υπάρχει } x_1 = 2 \in [0, 2] \text{ τέτοιο ώστε} \\
 f(x_1) &= g(2-x_1)
 \end{aligned}$$

iii) Αν $\underline{H(0) \neq 0 \text{ και } H(2) \neq 0}$ τότε από την σχέση (8) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 H(0) \cdot H(2) &< 0 \text{ και επειδή η } H \text{ είναι συνεχής στο } [0, 2] \text{ ως διαφορά συνεχών} \\
 , \text{ από το } \underline{\text{θεώρημα Bolzano}} &\text{ προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα} \\
 x_1 \in (0, 2) &\Rightarrow x_1 \in [0, 2] \text{ τέτοιο ώστε } H(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_1) = g(2-x_1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Οπότε σε κάθε περίπτωση υπάρχει τουλάχιστον ένα } x_1 &\in [0, 2] \text{ τέτοιο ώστε} \\
 f(x_1) &= g(2-x_1)
 \end{aligned}$$

δ) Θεωρούμε την συνάρτηση G με $G(x) = f(x) - g(2-x)$

H G είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$, ως διαφορά συνεχών

H G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 2)$, ως διαφορά παραγωγισίμων με

$$G'(x) = f'(x) + g'(2-x) \quad (9)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$G'(x_2) = \frac{G(2) - G(0)}{2 - 0} \stackrel{(9)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f'(x_2) + g'(2-x_2) = \frac{[f(2) - g(0)] - [f(0) - g(2)]}{2} \stackrel{(6),(7)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f'(x_2) + g'(2-x_2) = \frac{2+2}{2} \Rightarrow \boxed{f'(x_2) + g'(2-x_2) = 2}$$