

ΘΕΜΑ Δ 36.91

- α) i) Έστω $(x, f(x))$ ένα τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f . Η απόσταση του από τη αρχή των αξόνων θα είναι

$$d(x) = \sqrt{x^2 + f^2(x)}, \quad x \in [-1, 1]$$

Η συνάρτηση d είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών στο κλειστό διάστημα $[-1, 1]$ οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής η d θα έχει ελάχιστο έστω στο x_0 . Άρα υπάρχει σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f που απέχει από την αρχή των αξόνων την μικρότερη απόσταση

- ii) Επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής και $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [-1, 1]$ συμπεραίνουμε ότι η g διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $[-1, 1]$

Ακόμη

$$f^2(x) + g^2(x) = 1 \Rightarrow g^2(x) = 1 - f^2(x) \xrightarrow{\text{η } g \text{ διατηρεί πρόσημο}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x) = \sqrt{1 - f^2(x)} & \text{για κάθε } x \in [-1, 1] \\ \text{ή} \\ g(x) = -\sqrt{1 - f^2(x)} & \text{για κάθε } x \in [-1, 1] \end{cases}$$

Είτε ισχύει ο τύπος $g(x) = \sqrt{1 - f^2(x)}$, είτε ισχύει ο τύπος

$g(x) = -\sqrt{1 - f^2(x)}$, η συνάρτηση g θα είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

- β) Έχουμε $f^2(x) + g^2(x) = 1 \Rightarrow f^2(x) = 1 - g^2(x) \xrightarrow{g^2(x) \geq 0} f^2(x) \leq 1 \Rightarrow |f(x)| \leq 1$

$$\Rightarrow -1 \leq f(x) \leq 1 \quad (1)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - x$, $x \in [-1, 1]$

Είναι

$$h(1) = f(1) - 1 \xrightarrow{(1)} h(1) \leq 0 \quad (2)$$

$$h(-1) = f(-1) + 1 \xrightarrow{(1)} h(-1) \geq 0 \quad (3)$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- i) Αν $h(1) = 0$ τότε ο αριθμός $x_1 = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$ και άρα η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $[-1, 1]$

ii) Αν $h(-1) = 0$ τότε ο αριθμός $x_2 = -1$ είναι ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$ και

άρα η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $[-1, 1]$

iii) Αν $h(1) \neq 0$ και $h(-1) \neq 0$ τότε από (2) και (3) προκύπτει ότι $h(1) < 0$ και

$h(-1) > 0$ οπότε $h(-1) \cdot h(1) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ ως πράξεις συνεχών, από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(-1, 1)$, άρα και στο διάστημα $[-1, 1]$

Οπότε σε κάθε περίπτωση η εξίσωση $f(x) = x$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $[-1, 1]$ και άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=x$

Ομοίως η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=-x$

γ) Αν $f(0)=0$ τότε η εξίσωση $f(x)f'(x)=x$ έχει λύση το $0 \in (-1, 1)$

Έστω $f(0) \neq 0$

Θεωρούμε την συνάρτηση φ με $\varphi(x) = f^2(x) - x^2$, $x \in [-1, 1]$. Έχουμε

η φ είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως πράξεις συνεχών

$$\varphi(-1) = f^2(-1) - 1^2 \quad \begin{matrix} f^2(x)+g^2(x)=1 \\ \text{θέτουμε } x=-1 \end{matrix} \Rightarrow f^2(-1)+g^2(-1)=1 \Rightarrow f^2(-1)-1=-g^2(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(-1) = -g^2(-1) \Rightarrow \varphi(-1) < 0 \quad (4)$$

$$\varphi(-1) = f^2(0) - 0^2 \quad \begin{matrix} f^2(x)+g^2(x)=1 \\ \text{θέτουμε } x=0 \end{matrix} \Rightarrow f^2(0)+g^2(0)=1 \Rightarrow f^2(0)-1=-g^2(0) \quad \begin{matrix} f(0) \neq 0 \\ \Rightarrow \end{matrix} \varphi(0) = f^2(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(0) > 0 \quad (5)$$

$$(4), (5) \Rightarrow \varphi(-1)\varphi(0) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει $\xi_1 \in (-1, 0)$, τέτοιο ώστε $\varphi(\xi_1) = 0$

Ομοίως

η φ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξεις συνεχών

$$\varphi(1) = f^2(1) - 1^2 \quad \begin{matrix} f^2(x)+g^2(x)=1 \\ \text{θέτουμε } x=1 \end{matrix} \Rightarrow f^2(1)+g^2(1)=1 \Rightarrow f^2(1)-1=-g^2(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(1) = -g^2(1) \Rightarrow \varphi(1) < 0 \quad (6)$$

$$(5), (6) \Rightarrow \varphi(0)\varphi(1) < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει $\xi_2 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $\varphi(\xi_2) = 0$

Ακόμη

η φ είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ ως πράξεις συνεχών

η φ είναι παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) ως πράξεις παραγωγίσιμων με $\varphi'(x) = 2f'(x)f(x) - 2x \quad (7)$

$$\text{και } \varphi(\xi_1) = \varphi(\xi_2) = 0$$

Άρα από το θεώρημα Rolle προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ και άρα $\xi \in (-1, 1)$

$$\text{, τέτοιο ώστε } \varphi'(\xi) \stackrel{(7)}{=} 0 \Rightarrow 2f'(\xi)f(\xi) - 2\xi = 0 \Rightarrow f'(\xi)f(\xi) - \xi = 0$$

άρα , η εξίσωση $f(x)f'(x) = x$ έχει λύση στο $(-1, 1)$

δ) Έχουμε για κάθε $x \in [-1, 1]$

$$[f(x) - g(x)]^2 \geq 0 \Rightarrow f^2(x) + g^2(x) - 2f(x)g(x) \geq 0 \quad \stackrel{f^2(x)+g^2(x)=1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 1 - 2f(x)g(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)g(x) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \leq \int_{-1}^1 \frac{1}{2}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{2}[1 - (-1)] \Rightarrow \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \leq 1$$