

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Δ 36.90

α) i) Έχουμε

$$f(x) = f^{-1}(x+4) \Rightarrow f(f(x)) = f(f^{-1}(x+4)) \Rightarrow f(f(x)) = x+4 \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow f(f(f(x))) = f(x+4) \quad (2)$$

$$(1) \xrightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f(x)} \Rightarrow f(f(f(x))) = f(x) + 4 \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow f(x+4) = f(x) + 4 \Rightarrow f(x+4) - f(x) = 4, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ii) Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, θα είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα. Όμως, από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι $f(x+4) > f(x)$, ενώ $x+4 > x$

Άρα η f δεν μπορεί να είναι γνησίως φθίνουσα, άρα θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{-4} f(x) dx &\stackrel{\alpha) \text{ ερώτημα}}{=} \int_0^{-4} [f(x+4) - 4] dx \stackrel{\substack{\text{θέτουμε } y=x+4 \Rightarrow dy=dx \\ \text{για } x=0 \Rightarrow y=4 \\ \text{για } x=-4 \Rightarrow y=0}}{=} \int_4^0 [f(y) - 4] dy \\ &= \int_4^0 [f(y) - 4] dy = - \int_0^4 [f(x) - 4] dx \end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x) dx + \int_0^{-4} f(x) dx &= \int_0^4 f(x) dx - \int_0^4 [f(x) - 4] dx = \\ &= \int_0^4 [\cancel{f(x)} - \cancel{f(x)} + 4] dx = 4(4-0) = 16 \end{aligned}$$

γ) Στην σχέση $f(x+4) - f(x) = 4$

$$\text{αν θέσουμε } x=0, \text{ έχουμε } f(4) - f(0) = 4 \quad (4)$$

$$\text{αν θέσουμε } x=-4, \text{ έχουμε } f(0) - f(-4) = 4 \quad (5)$$

$$\text{Προσθέτοντας κατά μέλη τις (4) και (5) έχουμε } f(4) - f(-4) = 8 \quad (6)$$

Ακόμη

$$\text{Θεωρούμε την συνάρτηση } h \text{ με } h(x) = f(x) - f(-x) - 4 \quad x \in [0, 4]$$

Η h είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 4]$ ως πράξεις συνεχών

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= \cancel{f(0)} - \cancel{f(0)} - 4 = -4 < 0 \\ h(4) &= f(4) - f(-4) - 4 \stackrel{(6)}{=} 8 - 4 = 4 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(0) \cdot h(4) < 0$$

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - f(-x) = 4 \text{ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο } (0,4)$$

- δ) Έχουμε ότι η διχοτόμος της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_1=1$

Η f είναι συνεχής στο $[x, x+4]$, ως πράξεις συνεχών

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x, x+4)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (x, x+4)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+4) - f(x)}{\cancel{x} + 4 - \cancel{x}} \stackrel{\text{α) ερώτημα}}{\Rightarrow} f'(\xi_1) = 1$$

Ομοίως υπάρχουν άπειρα σημεία $\xi_2 \in (x+4, x+8)$, $\xi_3 \in (x+8, x+12)$, $\xi_4 \in (x+12, x+16)$ κλπ τέτοια ώστε $f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = f'(\xi_4) = \dots = 1$

Στα άπειρα αυτά σημεία $(\xi_1, f(\xi_1))$, $(\xi_2, f(\xi_2))$, $(\xi_3, f(\xi_3))$, $(\xi_4, f(\xi_4))$ κλπ οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f , έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2=1$ και άρα είναι παράλληλες στη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων