

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Β 36.9

α) Για να ορίζεται η f πρέπει :

$$9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow |x| \leq 3 \Rightarrow x \in [-3, 3]$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = [-3, 3]$

β) i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-3, 3)$ με

$$f'(x) = (x+3)' \cdot \sqrt{9-x^2} + \frac{x+3}{\sqrt{9-x^2}} \cdot (-2x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{9-x^2} - \frac{x^2+3x}{\sqrt{9-x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}^2 - (x^2+3x)}{\sqrt{9-x^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{9-x^2-x^2-3x}{\sqrt{9-x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x^2-3x+9}{\sqrt{9-x^2}}$$

ii) Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό παραγώγου:

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x+3)\sqrt{9-x^2}}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \sqrt{9-x^2} = 0 \Rightarrow f'(-3) = 0$$

γ) Έχουμε

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x^2-3x+9}{\sqrt{9-x^2}} = 0 \Rightarrow -2x^2-3x+9 = 0$$

$$\Delta = 9 + 72 = 81 \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm 9}{-4} \quad \begin{matrix} \nearrow x_1 = \frac{12}{-4} = -3 \\ \searrow x_1 = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} \end{matrix}$$

Τα πρόσημα της f' (στο $x_0 = 3$ δεν ενδιαφέρει αν είναι παραγωγίσιμη ή όχι), η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνεται στον διπλανό πίνακα
Οπότε

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$.

f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$.

x	$-\infty$	-3	$\frac{3}{2}$	3	$+\infty$
$f'(x)$			+ 0 -		
$f(x)$			$\frac{27\sqrt{3}}{4}$		
		τε	τμ	τε	

δ) Η f έχει στο $x_0 = \frac{3}{2}$ (ολικό) μέγιστο το $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27\sqrt{3}}{4}$

Επίσης η f παρουσιάζει ελάχιστο στα άκρα του πεδίου ορισμού της δηλαδή

Η f έχει στο $x_0 = -3$ (ολικό) ελάχιστο το $f(-3) = 0$

Η f έχει στο $x_0 = 3$ (ολικό) ελάχιστο το $f(3) = 0$