Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Δ 36.89

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο R , ως πράξεις παραγωγίσιμων , με

$$f'(x)=\frac{\alpha\left(x^2+1\right)-2x\left(\alpha x+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-\alpha x^2-6x+\alpha}{\left(x^2+1\right)^2}\quad (1)$$

επειδή η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στη θέση $x_1=-2$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει

$$f'(-2)=0\overset{(1)}{\Rightarrow}\frac{-\alpha(-2)^2-6(-2)+\alpha}{\left((-2)^2+1\right)^2}=0\Rightarrow -4\alpha+12+\alpha=0\Rightarrow \alpha=4$$

β) Για $\alpha=4$ ο τύπος της f γίνεται $f(x)=\dfrac{4x+3}{x^2+1}$

Οπότε

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x^\nu f(x)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(x^\nu\frac{4x+3}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^{\nu+1}+3x^\nu}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^{\nu+1}}{x^2}$$

Επομένως

Για $\nu=0$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^\nu f(x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^{0+1}}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x}=0$

Για $\nu=1$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^\nu f(x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^{1+1}}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}4=4$

Για $\nu>1$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x^\nu f(x)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^{\nu+1}}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}4x^{\nu-1}=\begin{cases}+\infty\,,\text{αν } \nu-1 \text{ άρτιος}\\ -\infty\,,\text{αν } \nu-1 \text{ περιττός}\end{cases}$$

Τελικά

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x^\nu f(x)\right]=\begin{cases}0\ ,\ \text{αν } \nu=0\\ 4\ ,\ \text{αν } \nu=1\\ +\infty\ ,\ \text{αν } \nu \text{ περιττός}\\ -\infty\ ,\ \text{αν } \nu \text{ άρτιος}\end{cases}$$

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση h με

$$h(x)=g(\varepsilon\varphi x)\ ,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x)=g'(\varepsilon\varphi x)\cdot(\varepsilon\varphi x)'\overset{g'(x)=f(x)-\frac{4x}{x^2+1}=\frac{4x+3}{x^2+1}-\frac{4x}{x^2+1}}{=}\left[\frac{4\varepsilon\varphi x+3}{\varepsilon\varphi^2 x+1}-\frac{4\varepsilon\varphi x}{\varepsilon\varphi^2 x+1}\right]\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$$=\frac{3}{\varepsilon\varphi^2x+1}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{3}{\frac{\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}+1}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\frac{3}{\frac{\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x}{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2x}}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2x}}=3$$

Άρα

$$h'(x)=3\Rightarrow h'(x)=(3x)'\Rightarrow h(x)=3x+c\overset{h(0)=g(\varepsilon\varphi 0)=g(0)=0\Rightarrow 3\cdot 0+c=0\Rightarrow c=0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow h(x)=3x\Rightarrow g(\varepsilon\varphi x)=3x \quad \text{, για κάθε } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$$

δ) $$\int_0^{\sqrt{3}}f(t)dt\overset{g'(x)=f(x)-\frac{4x}{x^2+1}\Rightarrow f(x)=g'(x)+\frac{4x}{x^2+1}}{=}\int_0^{\sqrt{3}}\left[g'(t)+\frac{4t}{t^2+1}\right]dt=$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}g'(t)dt+\int_0^{\sqrt{3}}\frac{4t}{t^2+1}dt\overset{\substack{(\text{επεξήγηση } 1)\\(\text{επεξήγηση } 2)}}{=}\boxed{\pi+2\ln 4}$$

επεξήγηση 1

$$\boxed{\int_0^{\sqrt{3}}g'(x)dx}=g(\sqrt{3})-g(0)\overset{\substack{g(\varepsilon\varphi x)=3x\overset{x=\frac{\pi}{3}}{\Rightarrow}g\left(\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}\right)=\cancel{3}\frac{\pi}{\cancel{3}}\Rightarrow g(\sqrt{3})=\pi\\ g(\varepsilon\varphi x)=3x\overset{x=0}{\Rightarrow}g(\varepsilon\varphi 0)=3\cdot 0\Rightarrow g(0)=0}}{=}\pi-0=\boxed{\pi}$$

επεξήγηση 2

$$\boxed{\int_0^{\sqrt{3}}\frac{4x}{x^2+1}dt}=2\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2x}{x^2+1}dt\overset{\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]'=\frac{2x}{x^2+1}}{=}=2\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^{\sqrt{3}}=$$

$$=2\left[\ln\left(\sqrt{3}^2+1\right)-\cancel{\ln 1}\right]=\boxed{2\ln 4}$$