

α) $(x^2 + 1)f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x) = e^x \Rightarrow$

$$(x^2 + 1)f''(x) + 2xf'(x) + 2xf'(x) + 2f(x) = e^x \Rightarrow$$

$$\left[(x^2 + 1)f'(x) \right]' + \left[2xf(x) \right]' = e^x \Rightarrow \left[(x^2 + 1)f'(x) + 2xf(x) \right]' = (e^x)' \Rightarrow$$

$$(x^2 + 1)f'(x) + 2xf(x) = e^x + c \quad (1)$$

Όμως $(1) \xrightarrow{x=0} (0^2 + 1)f'(0) + 2 \cdot 0 \cdot f(0) = e^0 + c \xrightarrow{f(0)=f'(0)=1} c = 1 \quad (2)$

Οπότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$(1) \xrightarrow{(2)} (x^2 + 1)f'(x) + 2xf(x) = e^x \Rightarrow \left[(x^2 + 1)f(x) \right]' = (e^x)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 + 1)f(x) = e^x + c_1 \quad (3)$$

Όμως $(3) \xrightarrow{x=0} (0^2 + 1)f(0) = e^0 + c_1 \xrightarrow{f(0)=1} c_1 = 0 \quad (4)$

Οπότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$(3) \xrightarrow{(4)} (x^2 + 1)f(x) = e^x \Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + 1) - 2xe^x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2 + 1)^2} \geq 0$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$ και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}

άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$

Όμως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} \stackrel{\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Άρα, τελικά, το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = (0, +\infty)$

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε για κάθε $x > 0$

$$x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow \frac{e^x}{x^2+1} > \frac{e^0}{0^2+1} \Rightarrow \frac{e^x}{x^2+1} > 1 \Rightarrow e^x > x^2+1$$

δ) Έχουμε

$$I = \int_{-3}^3 \frac{1}{f(x)(1+e^{-x})} dx = \int_{-3}^3 \frac{1}{\frac{e^x}{x^2+1} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} dx = \int_{-3}^3 \frac{1}{\frac{e^x}{x^2+1} \frac{e^x+1}{e^x}} dx$$

Άρα

$$I = \int_{-3}^3 \frac{x^2+1}{e^x+1} dx \quad (5)$$

Ακόμη

$$I = \int_{-3}^3 \frac{x^2+1}{e^x+1} dx \stackrel{\substack{\text{θέτουμε } y=-x \Rightarrow dy=-dx \\ \text{για } x=-3 \Rightarrow y=3 \\ \text{για } x=3 \Rightarrow y=-3}}{=} -\int_3^{-3} \frac{y^2+1}{e^{-y}+1} dx = \int_{-3}^3 \frac{y^2+1}{\frac{1}{e^y}+1} dx =$$

$$= \int_{-3}^3 \frac{y^2+1}{\frac{1+e^y}{e^y}} dx = \int_{-3}^3 e^y \frac{y^2+1}{e^y+1} dx$$

Άρα

$$I = \int_{-3}^3 e^x \frac{x^2+1}{e^x+1} dx \quad (6)$$

Προσθέτουμε τις σχέσεις (5) και (6) κατά μέλη και έχουμε

$$2I = \int_{-3}^3 e^x \frac{x^2+1}{e^x+1} dx + \int_{-3}^3 \frac{x^2+1}{e^x+1} dx \Rightarrow 2I = \int_{-3}^3 e^x \frac{x^2+1}{e^x+1} + \frac{x^2+1}{e^x+1} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2I = \int_{-3}^3 \frac{x^2+1}{\cancel{e^x+1}} (\cancel{e^x+1}) dx \Rightarrow 2I = \int_{-3}^3 (x^2+1) dx \Rightarrow 2I = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-3}^3 \Rightarrow$$

$$2I = \left(\frac{27}{3} + 3 \right) - \left(\frac{-27}{3} - 3 \right) \Rightarrow 2I = 24 \Rightarrow I = 12$$