

- α) i) Η συνάρτηση $\frac{4}{f^2(x)+1}$, είναι παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και άρα, η f' είναι και αυτή παραγωγίσιμη, ως πηλίκο παραγωγίσιμων, οπότε η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

$$\text{ii) } f'(x) = \frac{4}{f^2(x)+1} \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} f''(x) = -\frac{8f(x)f'(x)}{[f^2(x)+1]^2} \quad (1)$$

Προφανώς $\frac{4}{f^2(x)+1} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Επίσης επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θα είναι $-\frac{8f'(x)}{[f^2(x)+1]^2} < 0$

Ακόμη

$$\text{για κάθε } x > 0 \xrightarrow{f \nearrow} f(x) > f(0) \xRightarrow{f(0)=0} f(x) > 0$$

$$\text{για κάθε } x < 0 \xrightarrow{f \nearrow} f(x) < f(0) \xRightarrow{f(0)=0} f(x) < 0$$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f(x)$		σημείο καμπής	

Άρα η f έχει ένα μόνο σημείο καμπής, το $(0, f(0))$ δηλαδή το $(0, 0)$

- β) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f^3(x) + 3f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x) = 3f^2(x)f'(x) + 3f'(x) = 3f'(x)[f^2(x)+1] \stackrel{(1)}{=}$$

$$= 3 \frac{4}{\cancel{f^2(x)+1}} [\cancel{f^2(x)+1}] = 12$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$h'(x) = 12 \Rightarrow h'(x) = (12x)' \Rightarrow h(x) = 12x + c \quad (2)$$

$$\text{Όμως } (2) \Rightarrow h(0) = 12 \cdot 0 + c \Rightarrow f^3(0) + 3f(0) = c \xRightarrow{f(0)=0} c = 0 \quad (3)$$

Οπότε

$$\textcolor{red}{(2)} \stackrel{\textcolor{red}{(3)}}{\Rightarrow} h(x) = 12x \Rightarrow f^3(x) + f(x) = 12x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

γ) Έστω x_0 μία ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$. Τότε $f(x_0) = x_0$ (4)

Τότε

$$f^3(x) + f(x) = 12x \quad \stackrel{\text{θέτουμε } x=x_0}{\Rightarrow} \quad f^3(x_0) + f(x_0) = 12x_0 \quad \textcolor{red}{(4)}$$

$$x_0^3 + x_0 = 12x_0 \Rightarrow x_0^3 - 9x_0 = 0 \Rightarrow x_0(x_0^2 - 9) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = 0, \quad x_0 = -3, \quad x_0 = 3$$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = x$, είναι οι -3, 0, 3

δ) Επειδή οι αριθμοί 0 και 3 είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = x$, θα ισχύει $f(0) = 0$, $f(3) = 3$

Οπότε

$$\int_0^3 f(x) dx \quad \begin{array}{l} \stackrel{f^3(x)+f(x)=12x}{y=f(x) \Rightarrow y=12x-f^3(x) \Rightarrow y=12x-y^3 \Rightarrow x=\frac{y^3-y}{12} \Rightarrow dx=\frac{3y-1}{12}dy} \\ = \\ \begin{array}{l} \text{για } x=0 \Rightarrow y=f(0) \Rightarrow y=0 \\ \text{για } x=3 \Rightarrow y=f(3) \Rightarrow y=3 \end{array} \end{array} \int_0^3 y \frac{3y-1}{12} dy =$$

$$= \frac{1}{12} \int_0^3 (3y^2 - y) dy = \frac{1}{12} \left[y^3 - \frac{y^2}{2} \right]_0^3 = \frac{1}{12} \left(3^3 - \frac{3^2}{2} \right) = \frac{15}{8}$$