

ΘΕΜΑ Δ 36.86

- α) Επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ συμπεραίνουμε ότι η f' θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$

Οπότε για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ θα είναι

$$x > \alpha \Rightarrow f'(x) > f'(\alpha) \Rightarrow f'(x) > 0$$

άρα η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$

Οπότε για κάθε $x \in (\alpha, \beta]$ θα είναι

$$x > \alpha \Rightarrow f(x) > f(\alpha) \Rightarrow f(x) > 0$$

- β) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = xf'(x) - f(x)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ θα είναι

$$h'(x) = \cancel{f'(x)} + xf''(x) - \cancel{f'(x)} \Rightarrow h'(x) = xf''(x) \stackrel{x \geq \alpha > 0}{>} 0$$

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$, οπότε για κάθε $x \in (\alpha, \beta]$ θα είναι

$$x > \alpha \Rightarrow h(x) > h(\alpha) \Rightarrow xf'(x) - f(x) > \alpha f'(\alpha) - f(\alpha) \stackrel{f(\alpha)=f'(\alpha)=0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \boxed{xf'(x) - f(x) > 0}$$

- γ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x)' f(x) + xf'(x) - 2f'(x) = f(x) + xf'(x) - 2f'(x) = \\ &= xf'(x) - f'(x) \end{aligned}$$

Άρα από το ερώτημα γ) προκύπτει ότι $\boxed{g'(x) > 0}$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$

- δ) Θεωρούμε την συνάρτηση h με

$$h(x) = xf(x) - 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx, \quad x \in [\alpha, \beta]$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με

$$h'(x) = f(x) + xf'(x) \stackrel{x > 0, f(x) > 0, f'(x) > 0}{>} h'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta] \text{ και επομένως}$$

η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ και άρα η h είναι 1-1

Ακόμη

η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πράξεις συνεχών

$$h(\alpha) = \alpha f(\alpha) - 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \stackrel{f(\alpha)=0}{=} -2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \stackrel{f(x)>0}{<} 0$$

$$h(\beta) = \beta f(\beta) - 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0 \quad \text{διότι από το } \gamma \text{ ερώτημα έχουμε ότι}$$

$$g \nearrow \stackrel{\beta > \alpha}{\Rightarrow} g(\beta) > g(\alpha) \Rightarrow$$

$$\beta f(\beta) - 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt > \alpha f(\alpha) - 2 \int_{\alpha}^{\alpha} f(t) dt \stackrel{f(\alpha)=0}{\Rightarrow}$$

$$\beta f(\beta) - 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt > 0$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ρίζα της h στο διάστημα (α, β)

και επειδή η h είναι 1-1 η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική. Δηλαδή υπάρχει

μοναδικό $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με

$$h'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 f(x_0) - 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0 \Rightarrow \boxed{f(x_0) = \frac{2}{x_0} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx}$$