

α) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = f(x) - xe^{\frac{1}{x}}$ (1), $x > 0$

Η h είναι παραγωγίσιμη, ως πράξεις παραγωγίσιμων, και για κάθε $x > 0$ είναι

$$h'(x) = f'(x) - \left(xe^{\frac{1}{x}}\right)' \Rightarrow h'(x) = f'(x) - \left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} \cancel{xe^{\frac{1}{x}}}\right) \Rightarrow$$

$$h'(x) = f'(x) + e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} - 1\right) \quad (2)$$

Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, η h θα είναι επίσης δύο φορές παραγωγίσιμη, διότι η h' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων, και για κάθε $x > 0$ είναι

$$h''(x) = f''(x) - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x} - 1\right) - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \overset{f''(x)=\frac{e^x}{x^3}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow h''(x) = \cancel{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}} - \cancel{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}} + \cancel{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}} - \cancel{\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}} \Rightarrow h''(x) = 0$$

Επομένως, σύμφωνα με γνωστή πρόταση, η h' είναι σταθερή, δηλαδή για κάθε

$x > 0$ είναι $h'(x) = c$,

και επειδή

$$h'(1) = f'(1) + e^1 \left(\frac{1}{1} - 1\right) \Rightarrow h'(1) = f'(1) \overset{f'(1)=0}{\Rightarrow} h'(1) = 0$$

θα είναι $h'(x) = 0$, για κάθε $x > 0$

Επομένως, η h είναι σταθερή, δηλαδή για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) = c$

και επειδή

$$h(1) = f(1) - 1 \cdot e^1 \overset{(1)}{\Rightarrow} h(1) = e - e \Rightarrow h(1) = 0$$

θα είναι $h(x) = 0 \Rightarrow f(x) - xe^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, για κάθε $x > 0$

β) Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{\substack{\text{μορφή } \frac{+\infty}{+\infty} \\ \text{DLH}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{\frac{1}{x}} = (+\infty) \cdot e^0 = +\infty$$

Ακόμη

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + \cancel{e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)} \Rightarrow f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \Rightarrow f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x}$$

$$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\eta\ f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		$\emptyset$	+
$f(x)$	$+\infty$		e min	$+\infty$

Οπότε

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (0, 1]$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha\ f(A_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) \Rightarrow f(A_1) = [e, +\infty)$$

και

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [1, +\infty)$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha\ f(A_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \Rightarrow f(A_2) = [e, +\infty)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [e, +\infty)$$

γ) Για κάθε $x > 0$, έχουμε ισοδύναμα

$$\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow x \ln\frac{x}{e} \geq -1 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \ln\frac{x}{e} \geq -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{e} \geq e^{-\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{x}{e}>0, e>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{x}{e}} \leq \frac{1}{e^{-\frac{1}{x}}} \Leftrightarrow \frac{e}{x} \leq e^{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{1}{x}<0}{\Leftrightarrow} e \leq xe^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow e \leq f(x), \text{ που ισχύει από το } \beta)$$

ερώτημα

δ) Έχουμε ισοδύναμα

$$f(10) + f(12) > 2f(11) \Leftrightarrow f(12) - f(11) > f(11) - f(10) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(12) - f(11)}{12 - 11} > \frac{f(11) - f(10)}{11 - 10} \quad (3)$$

Αρκεί λοιπόν να αποδειχτεί η σχέση (3)

Πράγματι

Η f είναι συνεχής στο $[10, 11]$, ως πράξεις συνεχών

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(10, 11)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_1 \in (10, 11)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(11) - f(10)}{11 - 10} \quad (4)$$

Ακόμη

Η f είναι συνεχής στο $[11, 12]$, ως πράξεις συνεχών

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(11, 12)$, ως πράξεις παραγωγίσιμων

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_2 \in (11, 12)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(12) - f(11)}{12 - 11} \quad (5)$$

Η σχέση (3) λοιπόν ισχύει διότι

$$(3) \stackrel{(4), (5)}{\Leftrightarrow} f'(\xi_2) > f'(\xi_1) \quad \text{που ισχύει αφού}$$

$$\xi_2 > \xi_1$$

και

$$\eta \ f' \ \text{είναι γνησίως αύξουσα διότι} \ x^3 f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} > 0 \ \text{για κάθε} \ x > 0$$