

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Δ 36.84

α) i) Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x) = x^2 f'(x) + 2xf(x) + \frac{1}{x}$, $x > 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και για κάθε $x > 0$

$$\begin{aligned} g'(x) &= x^2 f''(x) + 2xf'(x) + 2xf'(x) + 2f(x) - \frac{1}{x^2} = \\ &= x^2 f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x) - \frac{1}{x^2} \stackrel{x^2 f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x) = \frac{1}{x^2}}{=} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

Οπότε η g είναι σταθερή δηλαδή είναι $g(x) = c$ για κάθε $x > 0$

Ακόμη

$$g(1) = 1^2 f'(1) + 2 \cdot 1 \cdot f(1) + \frac{1}{1} = f'(1) + 2 \cdot f(1) + 1 \stackrel{\substack{f(1)=1 \\ f'(1)=-3}}{=} -3 + 2 \cdot 1 + 1 = 0$$

Άρα για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) = 0 \Rightarrow x^2 f'(x) + 2xf(x) + \frac{1}{x} = 0$

Είναι

$$x^2 f'(x) + 2xf(x) + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow (x^2 f(x) + \ln x)' = 0 \Rightarrow x^2 f(x) + \ln x = c \quad (1)$$

$$(1) \stackrel{x=1}{\Rightarrow} 1^2 f(1) + \ln 1 = c \stackrel{f(1)=1}{\Rightarrow} c = 1 \quad (2)$$

$$\text{Οπότε } (1) \stackrel{(2)}{\Rightarrow} x^2 f(x) + \ln x = 1 \Rightarrow x^2 f(x) = 1 - \ln x \stackrel{x>0}{\Rightarrow} f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

ii) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι $g(x) = c_1 \Rightarrow x^2 f(x) + \ln x = c_1 \quad (5)$, για κάθε $x > 0$

$$(5) \stackrel{x=1}{\Rightarrow} 1^2 f(1) + \ln 1 = c_1 \stackrel{f(1)=1}{\Rightarrow} c_1 = 1 \quad (6)$$

$$(5) \stackrel{(6)}{\Rightarrow} x^2 f(x) + \ln x = 1 \Rightarrow x^2 f(x) = 1 - \ln x \Rightarrow f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad x > 0$$

β) Για κάθε $x > 0$, είναι

$$f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\frac{1}{x} x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{x(2 \ln x - 3)}{x^4}$$

$$\text{Άρα } f'(x) = 0 \Rightarrow x(2 \ln x - 3) = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Rightarrow} x^2 = e^3 \stackrel{x > 0}{\Rightarrow} x = \sqrt{e^3}$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x^2} \stackrel{\substack{\text{μορφή } \frac{-\infty}{+\infty} \\ \text{DLH}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} [1 - \ln x] \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία της f , τα ακρότατα και τα όρια στα άκρα του πεδίου ορισμού της , φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$\sqrt{e^3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-		0	+
$f(x)$	$+\infty$		$-\frac{1}{2e^3}$	0

Από τον παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι

$$A_1 = (0, \sqrt{e^3}] \xRightarrow{f} f(A_1) = \left[f(\sqrt{e^3}), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = \left[-\frac{1}{2e^3}, +\infty \right)$$

$$A_2 = [0, +\infty) \xrightarrow{f} f(A_2) = \left[f\left(\sqrt{e^3}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left[-\frac{1}{2e^3}, 0 \right)$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left[-\frac{1}{2e^3}, +\infty \right)$$

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$

Η h είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ ως πηλίκο συνεχών

Η h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$$h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow h'(x) = f(x) \quad (7)$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο

$$\omega\sigma\tau\epsilon \quad h'(\xi) = \frac{h(\alpha) - h(\beta)}{\alpha - \beta} \Rightarrow h'(\xi) = \frac{\frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{\ln \beta}{\beta}}{\alpha - \beta} \quad (8)$$

Οπότε

$$f(\beta) < \frac{\frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{\ln \beta}{\beta}}{\alpha - \beta} < f(\alpha) \stackrel{(8)}{\Leftrightarrow} f(\beta) < h'(\xi) < f(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{(7)}{\Leftrightarrow} f(\beta) < f(\xi) < f(\alpha) \quad \stackrel{0 < \alpha < \beta < 2 < \sqrt{e^3}, f \searrow}{\Leftrightarrow} \alpha < \xi < \beta, \text{ που ισχύει διότι } \xi \in (\alpha, \beta)$$

δ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$\begin{aligned} E &= \int_1^{e^2} |f(x)| dx = \int_1^{e^2} \left| \frac{1 - \ln x}{x^2} \right| dx \stackrel{\substack{1 - \ln x < 0 \Rightarrow x > e \\ 1 - \ln x > 0 \Rightarrow x < e}}{=} \\ &= \int_1^e \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right) dx - \int_e^{e^2} \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right) dx = \left[\frac{\ln x}{x} \right]_1^e - \left[\frac{\ln x}{x} \right]_e^{e^2} = \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{\ln x}{x} \right]_1^e - \left[\frac{\ln x}{x} \right]_e^{e^2} = \frac{1}{e} - \left(\frac{2}{e^2} - \frac{1}{e} \right) = \frac{2e - 2}{e^2}$$