ΘΕΜΑ Δ 36.83

α) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x)=(2x^2-2x+1)e^{2x}$, $x\in R$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο R με

$$h'(x)=(2x^2-2x+1)'e^{2x}+(2x^2-2x+1)(e^{2x})'=$$

$$=(4x-2)e^{2x}+(2x^2-2x+1)2e^{2x}=(\cancel{4x}-\cancel{2}+4x^2-\cancel{4x}+\cancel{2})e^{2x}$$

$$=4x^2e^{2x}$$

Άρα $f'(x)=h'(x)\Rightarrow f(x)=h(x)+c\Rightarrow$

$f(x)=(2x^2-2x+1)e^{2x}+c$, c: σταθερά (1)

Όμως

$$(1)\overset{\text{θέτουμε } x=0}{\Rightarrow} f(0)=(2\cdot 0^2-2\cdot 0+1)e^{2\cdot 0}+c\overset{f(0)=1}{\Rightarrow} c=0 \quad (2)$$

Οπότε

$$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow} f(x)=(2x^2-2x+1)e^{2x} \text{ για κάθε } x\in R$$

β) Παρατηρούμε ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R^*$ και $f'(0)=0$. Δηλαδή η f' μηδενίζεται μόνο στο 0 , αλλά δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του μηδέν , <u>οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το R , άρα και 1–1</u>

Ακόμη επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το R και είναι γνησίως αύξουσα το σύνολο τιμών της θα είναι το $f(R)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\ \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$

Όμως

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x^2-2x+1)e^{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-2x+1}{e^{-2x}}\overset{\text{μορφή }\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x^2-2x+1)'}{(e^{-2x})'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-2}{-2e^{-2x}}\overset{\text{μορφή }\frac{-\infty}{-\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{4e^{-2x}}=0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x^2-2x+1)e^{2x}=(+\infty)(+\infty)=+\infty$$

Άρα ο σύνολο τιμών της f είναι το $f(R)=(0,+\infty)$

γ) Επειδή η f είναι 1–1 θα είναι αντιστρέψιμη , δηλαδή υπάρχει η συνάρτηση f^{-1}

Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $g(x)=2004f^{-1}(x)$, θα είναι

$$g(f(x))=2004\cdot f^{-1}(f(x)) \overset{f^{-1}(f(x))=x}{\Rightarrow} g(f(x))=2004x$$

Άρα υπάρχει συνάρτηση $g:f(R)\to R$ τέτοια ώστε να ισχύει $g(f(x))=2004x$ για κάθε $x\in R$ και αυτή είναι η
$g(x)=2004f^{-1}(x)$, $x\in f(R)=(0,+\infty)$

δ) Έστω ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της , δηλαδή στο $(0\ ,+\infty)$. Τότε η συνάρτηση $g(f(x))$ θα είναι παραγωγίσιμη στο R , ως σύνθεση παραγωγίσιμων , οπότε για κάθε $x\in R$, θα είναι

$$g(f(x))=2004x \overset{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} g'(f(x))f'(x)=2004 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(f(x))4x^2e^{2x}=2004 \overset{\text{θέτουμε } x=0}{\Rightarrow} g'(f(0))4\cdot 0^2\cdot e^{2\cdot 0}=2004$$

$\Rightarrow g'(1)\cdot 0=2004$ <u>άτοπο</u>

Άρα <u>η g δεν είναι παραγωγίσιμη σε όλο πεδίο ορισμού της</u>