Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Δ 36.82

α) Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ διότι είναι παραγωγίσιμη

Ακόμη
$f(0)+f(1)=0 \Rightarrow f(1)=-f(0)$

Οπότε $f(1)\cdot f(0)=-f^2(0) \overset{f(0)\neq 0}{<} 0$
Άρα σύμφωνα με το <u>θεώρημα Bolzano</u> υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (0,1)$
τέτοιο ώστε $f(x_o)=0$

Επειδή όμως $f'(x)>0$ για κάθε $x \in [0,1]$, η f θα είναι <u>γνησίως αύξουσα</u> στο $[0,1]$ άρα και <u>1–1</u>

Επομένως το x_o του θεωρήματος Bolzano είναι <u>μοναδικό</u>

Άρα <u>υπάρχει ακριβώς ένα $x_o \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=0$</u>

β) Εφαρμόζουμε <u>θεώρημα μέσης τιμής για την f</u> στο διάστημα $[0,1]$. Πράγματι

η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$
η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$
Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του <u>θεωρήματος μέσης τιμής</u> οπότε ,
υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \overset{f(0)=-f(1)}{\Rightarrow} f'(x_1)=\frac{f(1)+f(1)}{1} \Rightarrow f'(x_1)=-2f(1)$$

γ) Επειδή ισχύει $f'(x)\leq 4$, για κάθε $x \in [0,1]$ θα ισχύει και
$f'(x_1)\leq 4 \Rightarrow 2f(1)\leq 4 \Rightarrow f(1)\leq 2$ (1)

Ακόμη επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, για κάθε $x \in [0,1]$ θα ισχύει

$$x\leq 1 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)\leq f(1) \overset{(1)}{\Rightarrow} f(x)\leq 2$$

δ) $f'(t)\leq 4 \Rightarrow \int_0^x f'(t)dt \leq \int_0^x 4dt \Rightarrow \left[f(t)\right]_0^x \leq 4(x-0) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)-f(0)\leq 4x \Rightarrow f(x)\leq 4x+f(0)$ (2)

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε

$$2f(x)\leq f(1)+4x+f(0) \overset{f(1)+f(0)=0}{\Rightarrow} 2f(x)\leq 4x \Rightarrow f(x)\leq 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx \leq \left[x^2\right]_0^1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx \leq 1$$