Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Δ 36.81

α) **i)** Αφού η F είναι αρχική της f , είναι παραγωγίσιμη
Επίσης είναι παραγωγίσιμη και η $xf(x)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων
Οπότε επειδή $f'(x)=xf(x)+F(x)$, η f' είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων , και άρα η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

ii) Η συνάρτηση f' είναι προφανώς συνεχής στο διάστημα [0 , 1] και παραγωγίσιμη στο διάστημα (0 , 1)

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $x_o\in(0\,,\,1)$ τέτοιο ώστε

$$f''(x_o)=\frac{f'(1)-f'(0)}{1-0}\overset{f'(1)=f(1)}{\Rightarrow} f''(x_o)=f(1)-f'(0) \quad \color{red}{(1)}$$

Όμως

$$xf(x)+F(x)=f'(x)\overset{x=0}{\Rightarrow}0\cdot f(0)+F(0)=f'(0)\Rightarrow F(0)=f'(0)$$

$$xf(x)+F(x)=f'(x)\overset{x=1}{\Rightarrow}1\cdot f(1)+F(1)=f'(1)\overset{f(1)=f'(1)}{\Rightarrow}F(1)=0$$

Άρα $\int_0^1 f(t)dt=F(1)-F(0)\overset{\substack{F(0)=f'(0)\\F(1)=0}}{\Rightarrow} f'(0)=-\int_0^1 f(t)dt$ $\color{red}{(2)}$

Οπότε $\color{red}{(1)},\color{red}{(2)}\Rightarrow \boxed{f''(x_o)=f(1)+\int_0^1 f(t)dt}$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση h με

$$h(x)=xF(x)+f(1)\ ,\ x\in[0,1]$$

Η h είναι παραγωγίσιμη , ως πράξεις παραγωγίσιμων , και για κάθε $x\in[0,1]$ είναι

$$h'(x)=F(x)+xf(x)\overset{f'(x)=F(x)+xf(x)}{\Rightarrow}h'(x)=f'(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x)=f(x)+c \quad \color{red}{(3)}\ \text{όπου c: σταθερός}$$

Ακόμη

$$\color{red}{(3)}\overset{x=1}{\Rightarrow}h(1)=f(1)+c\Rightarrow 1\cdot F(1)+f(1)=f(1)+c\overset{F(1)=0}{\Rightarrow}c=0 \quad \color{red}{(4)}$$

Οπότε

$$\color{red}{(3)}\overset{\color{red}{(4)}}{\Rightarrow}h(x)=f(x)\Rightarrow f(x)=xF(x)+f(1)\ \text{για κάθε}\ x\in[0,1]$$

γ) Επειδή η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_1\in(0,1)$, το οποίο είναι εσωτερικό , και στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη , σύμφωνα με το θεώρημα Fermat , θα είναι

$$f'(x_1)=0\overset{f'(x)=xf(x)+F(x)}{\Rightarrow}x_1f(x_1)+F(x_1)=0\Rightarrow F(x_1)=-x_1f(x_1) \quad \color{red}{(5)}$$

Ακόμη

$$f(x)=xF(x)+f(1)\overset{x=0}{\Rightarrow}f(0)=f(1) \quad (6)$$

Επίσης

$$f(x)=xF(x)+f(1)\overset{x=x_1}{\Rightarrow}f(x_1)=x_1F(x_1)+f(1)\overset{(5),(6)}{\Rightarrow}$$

$$f(x_1)=x_1(-x_1f(x_1))+f(0)\Rightarrow f(x_1)=-x_1^2f(x_1)+f(0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1)+x_1^2f(x_1)=f(0)\Rightarrow f(x_1)(1+x_1^2)=f(0)\overset{1+x_1^2\neq 0}{\Rightarrow}f(x_1)=\frac{f(0)}{x_1^2+1}$$

δ) Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ και σύμφωνα με το <u>θεώρημα</u> μέγιστης και ελάχιστης τιμής η f θα έχει ελάχιστη τιμή , έστω m και μέγιστη τιμή , έστω M

Όμως για την ελάχιστη τιμή m θα είναι

είτε $m = f(0) = 0$

είτε $m = f(1) \overset{(6)}{=} f(0) = 0$

είτε $m = f(x_1)$ όπου x_1 κάποιο εσωτερικό σημείο του διαστήματος $[0,1]$ και άρα σύμφωνα με το ερώτημα δ) <u>θα είναι πάλι $m = 0$</u>

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση είναι $m = 0$
Ομοίως θα είναι $M = 0$
Άρα για κάθε $x\in[0 , 1]$ είναι $m \leq f(x) \leq M\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 0 \Rightarrow f(x)=0$