

$$\alpha) \quad f(x+1) - f(x) > f'(x) \stackrel{(x+1)-x=1}{\Leftrightarrow} \boxed{\frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x}} > f'(x) \stackrel{(\text{επεξήγηση})}{\Leftrightarrow} \boxed{f'(\xi)} > f'(x) \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{f: \text{κυρτή} \Rightarrow f' \nearrow}{\Leftrightarrow} \xi > x, \text{ που ισχύει διότι } \xi \in (x, x+1)$$

επεξήγηση

$$\left. \begin{array}{l} f: \text{συνεχής στο } [x, x+1] \\ f: \text{παραγωγίσιμη στο } (x, x+1) \end{array} \right\} \stackrel{\text{ΘΜΤ}}{\Rightarrow} \text{υπάρχει } \xi \in (x, x+1) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$\boxed{f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x}}$$

β) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$\begin{aligned} \boxed{g'(x)} &= (x+1)' f(x) + (x+1) f'(x) - (x)' f(x+1) - x f'(x+1) - 1 = \\ &= f(x) + (x+1) f'(x) - f(x+1) - x f'(x+1) - 1 = \\ &= f(x) + x f'(x) + f'(x) - f(x+1) - x f'(x+1) - 1 = \\ &= [f'(x) - f(x+1) + f(x)] + x [f'(x) - f'(x+1)] - 1 \boxed{< 0} \end{aligned}$$

διότι

$$f'(x) - f(x+1) + f(x) < 0 \text{ από α) ερώτημα}$$

$$x \geq 0$$

$$f'(x) - f'(x+1) < 0 \text{ (διότι η } f' \nearrow \text{)}$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = 3f(x) - 2f\left(\frac{3x}{2}\right)$, $x \in [0, +\infty)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με

$$h'(x) = 3f'(x) - 2f'\left(\frac{3x}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow h'(x) = 3 \left[f'(x) - f'\left(\frac{3x}{2}\right) \right] \stackrel{x \leq \frac{3x}{2}}{\stackrel{f: \text{κυρτή} \Rightarrow}{\Rightarrow}} \boxed{h'(x) \leq 0}$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$

Οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα και άρα

για κάθε

$$x > 0 \stackrel{h \searrow}{\Rightarrow} h(x) < h(0) \Rightarrow 3f(x) - 2f\left(\frac{3x}{2}\right) < 3f(0) - 2f(0) \stackrel{f(0)}{\Rightarrow} 3f(x) - 2f\left(\frac{3x}{2}\right) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) \leq \frac{2}{3} f\left(\frac{3x}{2}\right)}$$

δ) Παρατηρούμε ότι

$$\frac{f(\xi)}{\xi} - \frac{f(\xi+1)}{\xi+1} = \frac{\xi-2}{\xi^2+\xi} \Leftrightarrow \frac{f(\xi)}{\xi} - \frac{f(\xi+1)}{\xi+1} = \frac{\xi-2}{\xi(\xi+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\xi+1)f(\xi) - \xi f(\xi+1) = \xi-2 \Leftrightarrow g(\xi) = 0$$

Άρα αρκεί να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση g έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,2)$

Όμως

Η συνάρτηση g

είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$

$$\left. \begin{array}{l} g(0) = f(0) + 2 \stackrel{f(0)=0}{=} 2 > 0 \\ g(2) = 3f(2) - 2f(3) \stackrel{\gamma) \text{ ερώτημα για } x=2 \Rightarrow f(2) < \frac{2}{3}f(3)}{\Rightarrow} g(2) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(0) \cdot g(2) < 0$$

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$ το οποίο είναι μοναδικό επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα