

ΘΕΜΑ Β 36.8

α) Πρέπει $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ για να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

$$\left. \begin{aligned} &\bullet f(1) = 1 + \alpha \\ &\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + \alpha x) = 1 + \alpha \\ &\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+1}{x} \right) = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 + \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 1$$

Προφανώς η f είναι συνεχής στα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ ως πολυωνυμική και ρητή αντίστοιχα. Για $\alpha = 1$ είναι και συνεχής στο $x_0 = 1$, άρα είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Για $\alpha = 1$ είναι $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & , x > 1 \\ x^2 + x & , x \leq 1 \end{cases}$

β) Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 4 \right]$. Ελέγχουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2}, 4 \right)$. Ελέγχουμε στο σημείο αλλαγής τύπου ($x_0 = 1$)

$$\begin{aligned} &\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = 3 \\ &\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\frac{x+1}{x} - 2}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1-x}{x(x-1)} \right) = -1 \end{aligned}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη

στο $x_0 = 1$. Συνεπώς δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος

Rolle για την f στο $\left[\frac{1}{2}, 4 \right]$

γ) Η εφάπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -\frac{1}{4}x + 2018$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{1}{4}$. Έστω ότι

εφάπτεται στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της f .

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

i) $x_0 \in (-\infty, 1)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1)$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 2x + 1$.

$$\text{Θέλουμε } f'(x_0) = -\frac{1}{4} \Rightarrow 2x_0 + 1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow x_0 = -\frac{5}{8} \in (-\infty, 1)$$

$$\text{Για } x = x_0 = -\frac{5}{8}, f(x_0) = \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(-\frac{5}{8}\right) = -\frac{15}{64}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y + \frac{15}{64} = -\frac{1}{4}\left(x + \frac{5}{8}\right) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{25}{64}$$

$$\text{ii) } x_0 \in (1, +\infty)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ ως ρητή με $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$\text{Θέλουμε } f'(x_0) = -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{4} \xRightarrow{x_0 > 1} x_0 = 2 \in (1, +\infty)$$

$$\text{Για } x = x_0 = 2, f(x_0) = \frac{3}{2}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + 2$$

iii) $x_0 = 1$ άτοπο αφού στο $x_0 = 1$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη .

δ) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνεπώς δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Αναζητούμε ασύμπτωτες στο $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lambda$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

Άρα η $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Αναζητούμε ασύμπτωτες στο $-\infty$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty \notin \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \notin \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

η γραφική παράσταση της f δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$

Για να χαράξουμε την γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι για

$$x > 1, f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \text{ δηλαδή η } f \text{ θα είναι η κατακόρυφη}$$

μετατόπιση της γνωστής γραφικής παράστασης της $\frac{1}{x}$ κατά 1.

Για $x < 1$, $f(x) = x^2 + x$ είναι παραβολή με ρίζες $x = -1$, $x = 0$

