

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f^5(x) + 5f(x) = x \quad \xRightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} \quad 5f^4(x)f'(x) + 5f'(x) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5f'(x)[f^4(x) + 1] = 1 \quad \xRightarrow{f^4(x)+1 \neq 0} \quad f'(x) = \frac{1}{5[f^4(x) + 1]} \quad \xRightarrow{f^4(x)+1 > 0} \quad f'(x) > 0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι και 1-1

Ακόμη

$$f^5(x) + 5f(x) = x \quad \xRightarrow{\text{θέτουμε όπου } x \text{ το } f^{-1}(x)} \quad f^5(f^{-1}(x)) + 5f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x) \quad \xRightarrow{f(f^{-1}(x))=x} \\ \Rightarrow f^{-1}(x) = x^5 + 5x$$

β) Είναι $f^{-1}(x) = x^5 + 5x \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = f(x^5 + 5x) \Rightarrow x = f(x^5 + 5x)$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x^5 + 5x) = \quad \xRightarrow{\text{θέτουμε } y = x^5 + 5x \text{ όταν } x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty} \quad = \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y)$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x^5 + 5x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

γ) Παρατηρούμε ότι

$$f^{-1}(x) = x^5 + 5x \quad \xRightarrow{\text{θέτουμε } x=0} \quad f^{-1}(0) = 0^5 + 5 \cdot 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

Έτσι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει ρίζα το 0

Θα τώρα δείξουμε ότι η παραπάνω ρίζα είναι και μοναδική

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - x$

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = \frac{1}{5[f^4(x) + 1]} - 1 = \frac{1 - 5f^4(x) - 5}{5[f^4(x) + 1]} = \frac{-5f^4(x) - 4}{5[f^4(x) + 1]} < 0 \quad \text{που σημαίνει ότι η } h$$

είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1 - 1

Οπότε η εξίσωση $h(x) = 0$ θα έχει το πολύ μία ρίζα και ισοδύναμα η εξίσωση

$f(x) = x$ θα έχει το πολύ μία ρίζα.

Άρα τελικά η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$

δ) Είδαμε προηγουμένως ότι

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Άρα } f([0, +\infty)) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [0, +\infty)$$

δηλαδή $1 \in f\left([0,+\infty)\right)$ και άρα υπάρχει $\alpha \in [0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f\left(\alpha\right)=1$
Το α αυτό είναι μοναδικό διότι η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και $1-1$

Ακόμη

$$\int_0^{\alpha} f\left(x\right)dx \overset{\text{θέτουμε } y=f\left(x\right)\Rightarrow x=f^{-1}\left(y\right)\Rightarrow x=y^5+5y\Rightarrow dx=\left(5y^4+5\right)dy}{\substack{=\\ \text{για } x=0\Rightarrow y=f\left(0\right)=0\\ \text{για } x=\alpha\Rightarrow y=f\left(\alpha\right)=1}} \int_0^1 y\left(5y^4+5\right)dy =$$

$$\int_0^1 y\left(5y^4+5\right)dy =\int_0^1 \left(5y^5+5y\right)dy =5\left[\frac{y^6}{6}+\frac{y^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$=5\left(\frac{1^6}{6}+\frac{1^2}{2}-0\right)=\frac{10}{3}$$