

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Δ 36.78

α) Θέτουμε $\int_{-1}^1 x\sqrt{x^2+3} \cdot f(x) dx = c$ και έχουμε

$$\int_{-1}^1 x\sqrt{x^2+4} \cdot f(x) dx = f(x) - \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \Rightarrow f(x) - \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} + c \quad (1)$$

Ακόμη

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} + c \quad \text{πολλαπλασιάζουμε με } x\sqrt{x^2+3} \Rightarrow x\sqrt{x^2+4} \cdot f(x) = x + cx\sqrt{x^2+4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 x\sqrt{x^2+4} \cdot f(x) dx = \int_{-1}^1 (x + cx\sqrt{x^2+4}) dx \quad \int_{-1}^1 x\sqrt{x^2+4} \cdot f(x) dx = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \int_{-1}^1 x dx + c \int_{-1}^1 x\sqrt{x^2+4} dx \quad \begin{array}{l} \int_{-1}^1 x\sqrt{x^2+4} dx \quad \text{θέτουμε } y=x^2+4 \Rightarrow dy=2x dx \\ \text{για } x=-1 \Rightarrow y=3 \\ \text{για } x=1 \Rightarrow y=5 \end{array} \quad \frac{1}{2} \int_3^5 \sqrt{y} dy = 0$$

$$\Rightarrow c = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 + c \cdot 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow c = 0 \quad (2)$$

Επομένως $(1) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

β) $\int_0^{\sqrt{5}} x^3 f(x) dx = \int_0^{\sqrt{5}} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}} dx = \int_0^{\sqrt{5}} \frac{x^2 \cdot x}{\sqrt{x^2+4}} dx =$

θέτουμε $y = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx = dy$
 $y = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow x^2+4 = y^2 \Rightarrow x^2 = y^2-4$
για $x=0 \Rightarrow y=2$
για $x=\sqrt{5} \Rightarrow y=3$

$$\int_2^3 (y^2-4) dy = \left[\frac{y^3}{3} - 4y \right]_2^3 = \left(\frac{3^3}{3} - 4 \cdot 3 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 4 \cdot 2 \right) = 9 - 12 - \frac{8}{3} + 8 = \frac{7}{3}$$

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(x) = -\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{\sqrt{x^2+4}^2} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+4}^3}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Τα πρόσημα της f' και η μονοτονία της f , φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f(x)	$\nearrow$		$\searrow$

Οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

Ακόμη

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{x^2+4}^3 - x \cdot 3\sqrt{x^2+4}^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{\sqrt{x^2+4}^6} = -\frac{\sqrt{x^2+4}^3 - 3x^2 \cdot \sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}^6} =$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+4}(\sqrt{x^2+4}^2 - 3x^2)}{\sqrt{x^2+4}^6} = -\frac{x^2+4-3x^2}{\sqrt{x^2+4}^5} = -\frac{4-2x^2}{\sqrt{x^2+4}^5} = \frac{2(x^2-2)}{\sqrt{x^2+4}^5}$$

Είναι $f''(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Τα πρόσημα της f'' και η κυρτότητα της f , φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+
f(x)					
	$\sigma.K.$		$\sigma.K.$		

Οπότε η f είναι

κυρτή στο $(-\infty, -\sqrt{2}]$ κοίλη στο $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ και κυρτή στο $[\sqrt{2}, +\infty)$

δ) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{+\infty} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f και στο $-\infty$ και στο $+\infty$

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο διπλανό σχήμα

