

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Δ 36.77

$$\alpha) \quad f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = f(x)g(x) \Rightarrow [f(x)g(x)]' = f(x)g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)g(x) = ce^x \quad (1), \quad c: \text{σταθερά}$$

$$(1) \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=0} f(0)g(0) = ce^0 \xrightarrow{f(0)g(0)=1} c=1 \quad (2)$$

$$\text{Οπότε } (1) \xrightarrow{(2)} f(x)g(x) = e^x$$

β) Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = 0$. Τότε

$$f(x)g(x) = e^x \xrightarrow{\text{θέτουμε } x=x_0} f(x_0)g(x_0) = e^{x_0} \xrightarrow{f(x_0)=0} e^{x_0} = 0, \text{ άτοπο}$$

Άρα η f δεν μηδενίζεται και αφού είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο και αφού $f(1) > e > 0$, θα είναι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Ακόμη

$$f(x)g(x) = e^x \Rightarrow g(x) = \frac{e^x}{f(x)} \xrightarrow{e^x > 0, f(x) > 0} g(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

γ) Θέτουμε $h(x) = g(x) - x$, $x \in [1, 2]$

Η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[1, 2]$

$$h(1) = g(1) - 1 \xrightarrow{f(x)g(x)=e^x \Rightarrow g(x)=\frac{e^x}{f(x)}} = \frac{e^1}{f(1)} - 1 = \frac{e - f(1)}{f(1)} \xrightarrow{f(1) > e, f(1) > 0} < 0$$

$$h(2) = g(2) - 2 \xrightarrow{g(2) > 2} > 0$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Rightarrow g(\xi) - \xi = 0 \Rightarrow g(\xi) = \xi$$

άρα η γραφική παράσταση της g τέμνει την ευθεία $y=x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi \in (1, 2)$

$$\delta) \quad \text{Είναι } g(\xi) = \xi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^\xi}{f(\xi)} = \xi \quad \xrightarrow{\xi \in (1, 2) \Rightarrow \xi \neq 0} \quad \Leftrightarrow \quad f(\xi) = \frac{e^\xi}{\xi}$$

$$\text{Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση } \varphi: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } \varphi(x) = \frac{e^x}{x}$$

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\varphi'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{e^x (x-1)}{x^2} \Rightarrow \varphi'(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (1, 2) \text{ και άρα}$$

η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 2]$

Οπότε

$$1<\overset{\nearrow \varphi}{\xi}<2\Rightarrow \varphi(1)<\varphi(\xi)<\varphi(2)\Rightarrow \frac{e^1}{1}<\frac{e^{\xi}}{\xi}<\frac{e^2}{2}\overset{f(\xi)=\frac{e^{\xi}}{\xi}}{\Rightarrow} e<f(\xi)<\frac{e^2}{2}$$