

ΘΕΜΑ Δ 36.76

α) Η συνάρτηση A είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$A'(x) = \frac{1}{\ln[xf(x)]-1} \cdot \frac{1}{xf(x)} \cdot [f(x) + xf'(x)] \Rightarrow$$

$$A'(x) = \frac{f(x) + xf'(x)}{xf(x)\ln[xf(x)] - xf(x)} \quad (1)$$

Όμως

$$xf(x)\ln[xf(x)] - xf(x) = x[xf'(x) + f(x)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{xf'(x) + f(x)}{xf(x)\ln[xf(x)] - xf(x)} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} (\ln x)' = A'(x)$$

Άρα οι συναρτήσεις $A(x) = \ln(\ln[xf(x)] - 1)$ και $B(x) = \ln x$, έχουν ίσες παραγώγους

β) Από το α) ερώτημα έχουμε

$$A'(x) = (\ln x)' \Rightarrow A(x) = \ln x + c \Rightarrow$$

$$\ln(\ln[xf(x)] - 1) = \ln x + c \quad (2), \quad c: \text{σταθερά}$$

$$(2) \stackrel{\text{θέτουμε } x=1}{\Rightarrow} \ln(\ln[1 \cdot f(1)] - 1) = \ln 1 + c \stackrel{f(1)=e^2}{\Rightarrow}$$

$$\ln(\ln e^2 - 1) + c = 0 \Rightarrow \ln(2 - 1) + c = 0 \Rightarrow c = 0 \quad (3)$$

Επομένως

$$(2) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \ln(\ln[xf(x)] - 1) = \ln x \Rightarrow \ln[xf(x)] - 1 = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln[xf(x)] = x + 1 \Rightarrow xf(x) = e^{x+1} \stackrel{x>0}{\Rightarrow} f(x) = \frac{e^{x+1}}{x}$$

γ) Είναι $g(x) = f(x) - f(-x) = \frac{e^{x+1}}{x} - \frac{e^{-x+1}}{-x} = \frac{e^{x+1} + e^{-x+1}}{x}$

$$\text{Άρα } xg(x) = e^{x+1} + e^{-x+1}$$

$$\text{Θέτουμε } h(x) = e^{x+1} + e^{-x+1} \quad x \geq 0$$

$$\text{Η } h \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } [0, +\infty) \text{ με } h'(x) = e^{x+1} - e^{-x+1}$$

Είναι

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x+1} - e^{-x+1} > 0 \Leftrightarrow e^{x+1} > e^{-x+1} \Leftrightarrow x+1 > -x+1 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Οπότε για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$x > 0 \Rightarrow h(x) > h(0) \stackrel{h(0)=e^{0+1}+e^{-0+1}=2e}{\Rightarrow} h(x) > 2e \Rightarrow xg(x) > 2e$$

δ) Από το γ) ερώτημα για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
 & xg(x) > 2e \Rightarrow g(x) > \frac{2e}{x} \stackrel{\text{ολοκληρώνουμε}}{\Rightarrow} \int_1^e g(x) dx > \int_1^e \frac{2e}{x} dx \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \int_1^e g(x) dx > 2e \int_1^e \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int_1^e g(x) dx > 2e [\ln x]_1^e \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \int_1^e g(x) dx > 2e (\ln e - \ln 1) \Rightarrow \int_1^e g(x) dx > 2e
 \end{aligned}$$