

ΘΕΜΑ Δ 36.75

- α) Επειδή η f είναι κυρτή η f' θα είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ θα είναι

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \stackrel{f'(0)=0}{\Rightarrow} f'(x) > 0 \quad (1)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ θα είναι

$$x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \stackrel{f(0)=1}{\Rightarrow} f(x) > 1$$

- β) Θεωρούμε την συνάρτηση $h: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x+2) + x - f(6-x) - 3$

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $[2, 4]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} h(2) &= f(2+2) + 2 - f(6-2) - 3 = \cancel{f(4)} - \cancel{f(4)} - 1 = -1 < 0 \\ h(4) &= f(4+2) + 4 - f(6-4) - 3 = f(6) - f(2) + 1 \stackrel{f(6)-f(2)>0}{>} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(2) \cdot h(4) < 0$$

Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi \in (2, 4)$ τέτοιο ώστε $f(\xi+2) + \xi = f(6-\xi) + 3$

- γ) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = e^{f(x)} - e \cdot f(x)$, $x \in [0, +\infty)$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, ως πράξεις παραγωγισίμων, με

$$h'(x) = e^{f(x)} f'(x) - e f'(x) = f'(x) [e^{f(x)} - e]$$

Και επειδή, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

από την (1) έχουμε $f'(x) > 0$

και από το α) ερώτημα έχουμε $f(x) > 1 \Rightarrow e^{f(x)} > e \Rightarrow e^{f(x)} - e > 0$,

για κάθε $x \in (0, +\infty)$, θα είναι $h'(x) > 0$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ θα είναι

$$x > 0 \Rightarrow h(x) > h(0) \Rightarrow e^{f(x)} - e \cdot f(x) > e^{f(0)} - e \cdot f(0) \stackrel{f(0)=1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow e^{f(x)} - e \cdot f(x) > 0 \Rightarrow e^{f(x)} > e \cdot f(x)$$

- δ) Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x) = f(x) - \ln f(x)$, $x \in [0, +\infty)$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, ως πράξεις παραγωγισίμων , με

$$g'(x) = f'(x) - [\ln f(x)]' = f'(x) - \frac{1}{f(x)} f'(x) =$$

$$= f'(x) \left(1 - \frac{1}{f(x)} \right) = f'(x) \cdot \frac{f(x) - 1}{f(x)}$$

Και επειδή , για κάθε $x \in (0, +\infty)$

από την (1) έχουμε $f'(x) > 0$

$$\text{και από το α) ερώτημα έχουμε } f(x) > 1 \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) - 1 > 0 \end{cases} ,$$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$, θα είναι $g'(x) > 0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Οπότε για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$x > 0 \xrightarrow{g'} g(x) > g(0) \Rightarrow f(x) - \ln f(x) > f(0) - \ln f(0) \xrightarrow{f(0)=1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) - \ln f(x) > 1 \Rightarrow f(x) > \ln f(x) + 1 \Rightarrow f(x) > \ln f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_1^2 f(t) dt > \int_1^2 \ln f(t) dt}$$