

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Δ 36.74

- α) Για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $x \leq 1 \Rightarrow f''(x) \geq f''(1) \xRightarrow{f''(1)=3} f''(x) \geq 3 \Rightarrow f''(x) > 0$
 Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα

Ακόμη

Η συνάρτηση f

είναι συνεχής στο $[0,1]$, αφού είναι παραγωγίσιμη

είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$

$$f(0) = f(1)$$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

Ακόμη

$$\text{για κάθε } x < \xi \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) \xRightarrow{f'(\xi)=0} f'(x) < 0$$

$$\text{για κάθε } x > \xi \Rightarrow f'(x) > f'(\xi) \xRightarrow{f'(\xi)=0} f'(x) > 0$$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας της f είναι ο παρακάτω

x	$-\infty$	0	ξ	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		τμ	τε	τμ	

Έτσι

$$\text{για κάθε } x \in [0, \xi] \Rightarrow x \leq \xi \Rightarrow f(x) \leq f(0) = f(1)$$

$$\text{για κάθε } x \in [\xi, 1] \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq f(1) = f(0)$$

οπότε $x \in [0,1]$ είναι $f(x) \leq f(1) = f(0)$ που σημαίνει ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_1 = 0$ και στο $x_2 = 1$

- β) Η συνάρτηση f'
 είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$,
 είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$

Οπότε σύμφωνα με το **θεώρημα μέσης τιμής** υπάρχει $\xi \in (0,1)$, τέτοιο ώστε

$$f''(\xi) = \frac{f'(1) - f'(0)}{1 - 0} \xRightarrow{f'(1)=1} f''(\xi) = 1 - f'(0) \xRightarrow{\xi \in (0,1) \Rightarrow \xi < 1 \Rightarrow f''(\xi) > f''(1) \xRightarrow{f''(1)=3} f''(\xi) > 3} 1 - f'(0) > 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -f'(0) > 2 \Rightarrow f'(0) < -2 \quad (1)$$

$$\gamma) \int_0^1 t f''(t) dt \stackrel{\text{παραγοντική ολοκλήρωση}}{=} \left[t f'(t) \right]_0^1 - \int_0^1 (t)' f'(t) dt =$$

$$= 1 \cdot f'(1) - \int_0^1 f'(t) dt \stackrel{f'(1)=1}{=} 1 - [f(t)]_0^1 = 1 - [f(1) - f(0)] \stackrel{f(0)=f(1)}{=} \boxed{1}$$

δ) Είναι $g(x) = \int_0^1 [f''(t)]^2 dt - 2x + \frac{x^2}{3}$ (1)

Οπότε

$$g'(x) = \frac{2x}{3} - 2 = \frac{2x-6}{3}$$

Επομένως $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Τα πρόσημα της g' , η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$\emptyset$	$+$
$g(x)$			

Από τον παραπάνω πίνακα είναι προφανές ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x_3 = 3$

Επειδή η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 3$ θα ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) \geq g(3) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} g(x) \geq \int_0^1 [f''(t)]^2 dt - 2 \cdot 3 + \frac{3^2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) \geq \int_0^1 [f''(t)]^2 dt - 3 \quad (2)$$

Ακόμη επειδή η f'' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$, θα ισχύει

$$\text{για κάθε } x \in [0,1] \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow f''(x) \geq f''(1) \stackrel{f''(1)=3}{\Rightarrow} f''(x) \geq 3$$

$$\Rightarrow [f''(x)]^2 \geq 9$$

Άρα επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$ έχουμε

$$\int_0^1 [f''(x)]^2 dx > \int_0^1 9 dx \Rightarrow \int_0^1 [f''(x)]^2 dx > 9(1-0) \Rightarrow$$

$$\int_0^1 [f''(x)]^2 dx > 9 \quad (3)$$

Οπότε

$$(2) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} g(x) > 9 - 3 \Rightarrow g(x) > 6 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$