

$$\alpha) \int_0^2 x f'(x) dx = 2f(2) - 4 \xrightarrow{\text{παραγοντική ολοκλήρωση}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x f(x)]_0^2 - \int_0^2 (x)' f(x) dx = 2f(2) - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{2f(2)} - \int_0^2 f(x) dx = \cancel{2f(2)} - 4 \Rightarrow \boxed{\int_0^2 f(x) dx = 4}$$

β) i) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = F(x) - \frac{x^2}{2} - x - F(0)$, $x \in [0, 2]$.

Έχουμε

$$h(x) = F(x) - \frac{x^2}{2} - x - F(0) \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} h'(x) = F'(x) - x - 1 \xrightarrow{F'(x)=f(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(x) = f(x) - x - 1 \xrightarrow{f(x) \geq x+1} h'(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [0, 2]$$

Άρα η h είναι αύξουσα (όχι γνησίως) και άρα για κάθε $x \in [0, 2]$ είναι

$$x \geq 0 \xrightarrow{h'} h(x) \geq h(0) \Rightarrow F(x) - \frac{x^2}{2} - x - F(0) \geq \cancel{F(0)} - \frac{0^2}{2} - 0 - \cancel{F(0)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) - \frac{x^2}{2} - x - F(0) \geq 0 \Rightarrow \boxed{F(x) \geq \frac{x^2}{2} + x + F(0)}$$

ii) Θεωρούμε την συνάρτηση w με $w(x) = F(2) - F(x) - 4 + x + \frac{x^2}{2}$, $x \in [0, 2]$.

Έχουμε

$$w(x) = F(2) - F(x) - 4 + x + \frac{x^2}{2} \xrightarrow{\text{παραγωγίζουμε}} w'(x) = -F'(x) + 1 + x \xrightarrow{F'(x)=f(x)} \Rightarrow$$

$$= w'(x) = -f(x) + 1 + x \xrightarrow{f(x) \geq x+1} w'(x) \leq 0 \text{ για κάθε } x \in [0, 2]$$

Άρα η w είναι φθίνουσα (όχι γνησίως) και άρα για κάθε $x \in [0, 2]$ είναι

$$x \leq 2 \xrightarrow{w \searrow} w(x) \geq w(2) \Rightarrow$$

$$F(2) - F(x) - 4 + x + \frac{x^2}{2} \geq \cancel{F(2)} - \cancel{F(2)} - 4 + \cancel{2} + \frac{2^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(2) - F(x) - 4 + x + \frac{x^2}{2} \geq 0 \Rightarrow \boxed{F(2) - F(x) \geq 4 - x - \frac{x^2}{2}}$$

γ) Από το α) ερώτημα έχουμε

$$\int_0^2 f(x) dx = 4 \Rightarrow F(2) - F(0) = 4 \Rightarrow F(2) = F(0) + 4 \quad (1)$$

Στο β)ii) ερώτημα όμως είδαμε ότι $F(2) - F(x) \geq 4 - x - \frac{x^2}{2}$

Επομένως θα είναι

$$F(2) - F(x) \geq 4 - x - \frac{x^2}{2} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} F(0) + \cancel{4} - F(x) \geq \cancel{4} - x - \frac{x^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -F(x) \geq -x - \frac{x^2}{2} - F(0) \Rightarrow \boxed{F(x) \leq x + \frac{x^2}{2} + F(0)} \quad \begin{array}{l} \beta) \text{ ερώτημα: } \boxed{F(x) \geq x + \frac{x^2}{2} + F(0)} \\ \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = x + \frac{x^2}{2} + F(0)} \stackrel{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} F'(x) = 1 + x \stackrel{F'(x)=f(x)}{\Rightarrow} \boxed{f(x) = x + 1} \text{ για κάθε } x \in [0, 2]$$

- δ) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, είναι

$$E = \int_0^1 |f(x)| dx \stackrel{\gamma) \text{ ερώτημα}}{=} \int_0^1 |x+1| dx \stackrel{x+1>0 \text{ στο } [0,1]}{=} \int_0^1 (x+1) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$