

α) Έχουμε ισοδύναμα

$$-2 \leq f'(x) \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq \frac{f'(x) = \frac{4g(x)}{g^2(x)+1}}{1} \Leftrightarrow -2 \leq \frac{4g(x)}{g^2(x)+1} \Leftrightarrow -g^2(x)-1 \leq 2g(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g^2(x) + 2g(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow [g(x) + 1]^2 \geq 0 \quad \text{που ισχύει}$$

και ομοίως

$$\boxed{f'(x) \leq 2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f'(x) = \frac{4g(x)}{g^2(x)+1}}{1} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{4g(x)}{g^2(x)+1} \leq 2 \Leftrightarrow 2g(x) \leq g^2(x) + 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq g^2(x) - 2g(x) + 1 \Leftrightarrow [g(x) - 1]^2 \geq 0 \quad \text{που ισχύει}$$

Άρα $-2 \leq f'(x) \leq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Η σχέση προφανώς ισχύει αν $\alpha = \beta$. Έστω $\alpha < \beta$. Τότε

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Έχουμε

η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$,

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\boxed{|f(\beta) - f(\alpha)| \leq 2|\beta - \alpha|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|f(\beta) - f(\alpha)|}{|\beta - \alpha|} \leq 2 \Leftrightarrow \left| \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \right| \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |f'(\xi)| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq f'(\xi) \leq 2 \quad \text{που ισχύει από το α) ερώτημα}$$

Ομοίως και αν $\alpha > \beta$. Επομένως η ζητούμενη σχέση ισχύει για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h'(x) = f'(x) - 2 \stackrel{\alpha) \text{ ερώτημα}}{\Rightarrow} h'(x) < 0$ και άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα οπότε για κάθε $x > 1$ θα είναι

$$x > 1 \stackrel{h \searrow}{\Rightarrow} h(x) < h(1) \Rightarrow f(x) - 2x \leq f(1) - 2 \stackrel{f(1)=0}{\Rightarrow} f(x) \leq 2x - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^4 f(x) dt \leq \int_1^4 (2x - 2) dt \Rightarrow \int_1^4 f(x) dt \leq [x^2 - 2x]_1^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^4 f(x) dt \leq (4^2 - 2 \cdot 4) - (1^2 - 2 \cdot 1) \Rightarrow \boxed{\int_1^4 f(x) dt \leq 9}$$

$$\delta) \text{ Επειδή } f(x) = \kappa x + \lambda \xRightarrow{\text{θετούμε } x=1} f(1) = \kappa \cdot 1 + \lambda \xRightarrow{f(1)=0} \kappa + \lambda = 0 \quad (2)$$

Ακόμη θα ισχύει

$$\int_1^4 f(x) dx = 9 \Rightarrow \int_1^4 (\kappa x + \lambda) dx = 9 \Rightarrow \left[\kappa \frac{x^2}{2} + \lambda x \right]_1^4 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\kappa \frac{4^2}{2} + 4\lambda \right) - \left(\kappa \frac{1}{2} + \lambda \right) = 9 \Rightarrow 8\kappa - \frac{\kappa}{2} + 3\lambda = 9 \Rightarrow 15\kappa + 6\lambda = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\kappa + 2\lambda = 9 \quad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα των (2) και (3) βρίσκουμε $\kappa = 3$ και $\lambda = -3$