ΘΕΜΑ Δ 36.71

α) Για κάθε $x \in R$ έχουμε

$$f\left(f\left(x\right)\right)+x=2g\left(x\right)\overset{\text{παραγωγίζουμε}}{\Rightarrow} f'\left(f\left(x\right)\right)f'\left(x\right)+1=2g'\left(x\right)$$

Παρατηρούμε ότι η για κάθε $x \in R$

διότι αν υπάρχει $x_o \in R$ με $f'\left(x_o\right)=0$ τότε

$$f'\left(f\left(x\right)\right)f'\left(x\right)+1=2g'\left(x\right)\overset{x=x_o}{\Rightarrow} f'\left(f\left(x_o\right)\right)f'\left(x_o\right)+1=2g'\left(x_o\right)\overset{f'\left(x_o\right)=0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 1=2g'\left(x_o\right)\Rightarrow g'\left(x_o\right)=\frac{1}{2}$$ άτοπο διότι $g'\left(x\right)\neq\frac{1}{2}$ για κάθε $x \in R$

Οπότε αφού $f'\left(x\right)\neq 0$ για κάθε $x \in R$ και η f' είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο στο R

Ακόμη

Η συνάρτηση f'
είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,1\right]$,
είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(0,1\right)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in \left(0,1\right)$, τέτοιο ώστε

$$f'\left(\xi\right)=\frac{f\left(1\right)-f\left(0\right)}{1-0}\Rightarrow f'\left(\xi\right)=f\left(1\right)-f\left(0\right)\overset{f(1)<f(0)}{\Rightarrow} f'\left(\xi\right)<0$$

Οπότε αφού η f' διατηρεί πρόσημο στο R και $f'\left(\xi\right)<0$ θα είναι $f'\left(x\right)<0$ για κάθε $x \in R$ που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Τέλος από την σχέση $f'\left(f\left(x\right)\right)f'\left(x\right)+1=2g'\left(x\right)$ έχουμε

$$g'\left(x\right)=\frac{f'\left(f\left(x\right)\right)f'\left(x\right)+1}{2}\overset{\left.\begin{matrix}f'(f(x))<0\\ f'(x)<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow f'(f(x))f'(x)>0\Rightarrow f'(f(x))f'(x)+1>0}{\Rightarrow} g'\left(x\right)>0$$ για κάθε $x \in R$ που σημαίνει ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο R

β) Θεωρούμε την συνάρτηση $h:R\to R$, με $h\left(x\right)=f\left(x\right)-x$
Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο R ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'\left(x\right)=f'\left(x\right)-1\overset{f'(x)<0}{\Rightarrow} h'\left(x\right)<0$ και άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο R οπότε είναι 1-1

Η συνάρτηση h

είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,1\right]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

$$\left.\begin{matrix}h\left(0\right)=f\left(0\right)-0=f\left(0\right)>1>0\\ h\left(x\right)=f\left(1\right)-1\overset{f(1)<1}{<}0\end{matrix}\right\}\Rightarrow h\left(0\right)\cdot h\left(1\right)<0$$

Οπότε , σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano , υπάρχει $x_o \in (0,1)$ τέτοιο ώστε
$h(x_o)=0 \Leftrightarrow f(x_o)=x_o$

που σημαίνει ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει ρίζα το x_o
Επειδή η h είναι 1-1 το παραπάνω x_o θα είναι μοναδικό

Ακόμη

$$f(f(x))+x=2g(x) \overset{\text{θέτουμε } x=x_o}{=} f(f(x_o))+x_o=2g(x_o) \overset{f(x_o)=x_o}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(x_o)+x_o=2g(x_o) \overset{f(x_o)=x_o}{\Rightarrow} x_o+x_o=2g(x_o) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x_o=2g(x_o) \Rightarrow g(x_o)=x_o$$

Άρα $f(x_o)=g(x_o)$ οπότε <u>η C_f και η C_g τέμνονται στο σημείο $(x_o\ ,\ x_o)$</u>

Τέλος θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)-g(x)$. Προφανώς η φ έχει ρίζα την x_o. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο R ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\varphi'(x)=f'(x)-g'(x) \overset{\substack{f'(x)<0 \\ g'(x)>0}}{\Rightarrow} \varphi'(x)<0$ που σημαίνει ότι η φ είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1 οπότε το x_o είναι η μοναδική της ρίζα που σημαίνει ότι η C_f και η C_g τέμνονται μόνο στο σημείο (x_o, x_o)

γ) Έχουμε

$$f(f(x))+x=2g(x) \overset{\text{θέτουμε όπου x το } x+x_o-2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(f(x+x_o-2))+x+x_o-2=2g(x+x_o-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(f(x+x_o-2))=2g(x+x_o-2)-x-x_o+2 \quad (5)$$

Οπότε

$$f(f(x+x_o-2))+x+x_o=2f(x+x_o-2)+2 \overset{(5)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2g(x+x_o-2)-\cancel{x}-\cancel{x_o}+\cancel{2}+\cancel{x}+\cancel{x_o}=2f(x+x_o-2)+\cancel{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{2}g(x+x_o-2)=\cancel{2}f(x+x_o-2) \Rightarrow g(x+x_o-2)=f(x+x_o-2) \Rightarrow$$

$$\overset{\text{γ) i) ερώτημα}}{\Rightarrow} x+x_o-2=x_o \Rightarrow x=2$$

δ) Έχουμε

$$f(f(x))+x=2g(x) \overset{\text{θέτουμε όπου x το } \ln x+x_o+1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(f(\ln x+x_o+1))+\ln x+x_o+1=2g(\ln x+x_o+1)$$

$$\Rightarrow f\left(f\left(\ln x + x_o + 1\right)\right) = 2g\left(\ln x + x_o + 1\right) - \ln x - x_o - 1 \quad (6)$$

Οπότε

$$f\left(f\left(\ln x + x_o + 1\right)\right) + \ln x + 1 < x_o \overset{(6)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2g\left(\ln x + x_o + 1\right) - \cancel{\ln x} - x_o - \cancel{1} + \cancel{\ln x} + \cancel{1} < x_o$$

$$\Rightarrow \cancel{2}g\left(\ln x + x_o + 1\right) < \cancel{2}x_o \Rightarrow g\left(\ln x + x_o + 1\right) < x_o \overset{g(x_o)=x_o}{\Rightarrow}$$

$$g\left(\ln x + x_o + 1\right) < g\left(x_o\right) \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} \ln x + \cancel{x_o} + 1 < \cancel{x_o} \Rightarrow \ln x < -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x < \ln e^{-1} \Rightarrow x < \frac{1}{e}$$