

- α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων και για κάθε $x > 0$ είναι

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) > 0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, άρα αντιστρέψιμη

- β) Η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$ και επειδή είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών της, θα είναι το

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

Όμως

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + \ln x) = 1 + (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + \ln x) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

- γ) Επειδή η συνάρτηση στο διάστημα $(0, 1)$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό, θα είναι το $f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right)$

Όμως

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + \ln x) = 1 + (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (e^x + \ln x) = e^1 + \ln 1 = e$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι στο διάστημα $(0, 1)$ είναι το $f(A_1) = (-\infty, e)$

Άρα αφού $e > 0$ θα υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ με $f(x_0) = 0$, δηλαδή υπάρχει ρίζα x_0 της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(0, 1)$, η οποία θα είναι και μοναδική αφού η f είναι 1-1

- δ) Παρατηρούμε ότι

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = x_0 \quad (1) \quad \text{και} \quad f(1) = e \Rightarrow f^{-1}(e) = 1 \quad (2)$$

$$\int_0^e f^{-1}(x) dx \quad \begin{array}{l} \text{Θέτουμε } y = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f(y) \Rightarrow dx = f'(y) dy \\ \text{για } x=0 \Rightarrow y = f^{-1}(0) = x_0 \quad (1) \\ \text{για } x=e \Rightarrow y = f^{-1}(e) = 1 \quad (2) \end{array} = \int_{x_0}^1 y f'(y) dy \quad \begin{array}{l} f'(y) = e^y + \frac{1}{y} \end{array} =$$

$$= \int_{x_0}^1 (ye^y + 1) dy = \int_{x_0}^1 ye^y dy + \int_{x_0}^1 1 dy = \int_{x_0}^1 y(e^y)' dy + 1(1 - x_0) =$$

$$=\left[ye^y\right]_{x_0}^1-\int_{x_0}^1e^ydy+1-x_0=1\cdot e^1-x_0e^{x_0}-\left[e^y\right]_{x_0}^1+1-x_0=$$

$$=e-x_0e^{x_0}-e^{x_0}+1-x_0=e^{x_0}\left(1-x_0\right)+1-x_0=\left(e^{x_0}+1\right)\left(1-x_0\right)$$