

α) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2e^x + 2x)(e^x + x^2) - (2e^x + x^2)(e^x + 2x)}{(e^x + x^2)^2} = \\ &= \frac{\cancel{2e^{2x}} + 2x^2e^x + 2xe^x + \cancel{2x^3} - \cancel{2e^{2x}} - 4xe^x - x^2e^x - \cancel{2x^3}}{(e^x + x^2)^2} = \\ &= \frac{x^2e^x - 2xe^x}{(e^x + x^2)^2} = \frac{xe^x(x-2)}{(e^x + x^2)^2} \end{aligned}$$

Οπότε $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$

Το πρόσημο της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$\emptyset$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f(x)$					

Δηλαδή η f είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και στο διάστημα $[2, +\infty)$
και κοίλη στο διάστημα $[0, 2]$

β) i) Έστω $x > 0$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση f στο διάστημα $[0, x]$. Έχουμε

η f είναι συνεχής στο $[0, x]$

η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, x)$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi_1 \in (0, x), \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \quad (1)$$

Οπότε

$$f(x) - x > f(0) \Leftrightarrow f(x) - f(0) > x \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x) - f(0)}{x} > 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi_1) > 1 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi_1) = \frac{2e^{\xi_1} + \xi_1^2}{e^{\xi_1} + \xi_1^2}}{\frac{2e^{\xi_1} + \xi_1^2}{e^{\xi_1} + \xi_1^2}} > 1 \Leftrightarrow \frac{e^{\xi_1} + \xi_1^2 > 0}{2e^{\xi_1} + \cancel{\xi_1^2}} > e^{\xi_1} + \cancel{\xi_1^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\xi_1} > 0 \text{ που ισχύει}$$

ii) Έστω $x < 0$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση f στο διάστημα $[x, 0]$. Έχουμε

η f είναι συνεχής στο $[x, 0]$

η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x, 0)$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi_2 \in (x, 0), \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \quad (2)$$

Οπότε

$$f(x) - x < f(0) \Leftrightarrow f(x) - f(0) < x \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x) - f(0)}{x} < 1 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi_2) < 1 \quad \Leftrightarrow \stackrel{f'(x) = \frac{2e^x + x^2}{e^x + x^2}}{\frac{2e^{\xi_2} + \xi_2^2}{e^{\xi_2} + \xi_2^2} < 1} \stackrel{e^{\xi_2} + \xi_2^2 > 0}{\Leftrightarrow} 2e^{\xi_2} + \cancel{\xi_2^2} < e^{\xi_2} + \cancel{\xi_2^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\xi_2} > 0 \quad \underline{\text{που ισχύει}}$$

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\left. \begin{array}{l} f(x) > x + f(0) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + f(0)] = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (3)$$

ενώ για κάθε $x < 0$ ισχύει

$$\left. \begin{array}{l} f(x) < x + f(0) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [x + f(0)] = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad (4)$$

Ακόμη

Παρατηρούμε ότι $f'(x) = \frac{2e^x + x^2}{e^x + x^2} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, και επειδή είναι και συνεχής, το σύνολο τιμών της θα είναι το

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \stackrel{(3), (4)}{=} (-\infty, +\infty) = \boxed{\mathbb{R}}$$

δ) Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &\stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + x^2}{e^x + x^2} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + 2x}{e^x + 2x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + 2}{e^x + 2} = \\ &\stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{2\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} = 2 \end{aligned}$$