

α) Για κάθε $x > 0$ είναι

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$$

$$\text{Άρα } f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-1} \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2e}$$

Τα πρόσημα της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	$+$
$f(x)$				

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{μορφή } \frac{-\infty}{+\infty}}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 \ln x) = +\infty$$

$$\text{Οπότε αν } A_1 = \left(-\infty, e^{-\frac{1}{2}}\right] \text{ και } A_2 = \left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right) \text{ είναι}$$

$$f \searrow \text{ στο } A_1 \Rightarrow f(A_1) = \left[f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\right] = \left[-\frac{1}{2e}, 0\right)$$

$$f \nearrow \text{ στο } A_2 \Rightarrow f(A_2) = \left[f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right] = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$$

$$\text{Οπότε το σύνολο τιμών της } f \text{ είναι το } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$$

β) Η εξίσωση $x^2 \ln x = \lambda$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = \lambda$. Οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- Αν $\lambda < -\frac{1}{2e}$ τότε $\lambda \notin f(A)$ και άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη
- Αν $\lambda = -\frac{1}{2e}$ τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μία ακριβώς λύση την $e^{-\frac{1}{2}}$

- Αν $-\frac{1}{2e} < \lambda < 0$ τότε
 $\lambda \in f(A_1)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μία λύση στο A_1 η οποία είναι
και μοναδική λόγω μονοτονίας της f στο A_1 και
 $\lambda \in f(A_2)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μία λύση στο A_2 η οποία είναι
και μοναδική λόγω μονοτονίας της f στο A_2
και επομένως η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει συνολικά δύο ακριβώς λύσεις
- Αν $\lambda > 0$ τότε
 $\lambda \notin f(A_1)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ δεν έχει λύση στο A_1
 $\lambda \in f(A_2)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μία λύση στο A_2 η οποία είναι
και μοναδική λόγω μονοτονίας της f στο A_2
και επομένως η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μία ακριβώς λύση

γ) Έχουμε ότι

$$f(x) \leq x^{x+1} - x \Leftrightarrow x^2 \ln x \leq x^{x+1} - x \quad \begin{matrix} \text{διαφορούμε με } x > 0 \\ x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x} \end{matrix} \Leftrightarrow x \ln x \leq x^x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x \ln x - e^{x \ln x} + 1 \leq 0} \quad (1)$$

Άρα αρκεί να αποδείξουμε την σχέση (1). Για το σκοπό αυτό θεωρούμε την

συνάρτηση h με $\boxed{h(x) = x - e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = 1 - e^x$. Άρα

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$h(0) = 0$$

Τα πρόσημα της h' , η μονοτονία και τα ακρότατα της h φαίνονται στον παρακάτω πίνακα μονοτονίας

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$		$\boxed{0}$ max	

Από τον πίνακα αυτό προκύπτει ότι $h(x) \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα και

$$h(x \ln x) \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \ln x - e^{x \ln x} + 1 \leq 0}$$

δ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{\frac{1}{e}}^e |f(x)| dx = \int_{\frac{1}{e}}^e |x^2 \ln x| dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 |x^2 \ln x| dx + \int_1^e |x^2 \ln x| dx \\
 &= -\int_{\frac{1}{e}}^1 (x^2 \ln x) dx + \int_1^e (x^2 \ln x) dx = -\int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x dx + \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x dx = \\
 &= -\left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_{\frac{1}{e}}^1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{x^3}{3} (\ln x)' dx + \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} (\ln x)' dx =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left[\frac{1^3}{3} \ln 1 - \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^3}{3} \ln \frac{1}{e} \right] + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{x^{\cancel{2}}}{3} \frac{1}{\cancel{x}} dx + \frac{e^3}{3} \ln e - \frac{1^3}{3} \ln 1 - \int_1^e \frac{x^{\cancel{2}}}{3} \frac{1}{\cancel{x}} dx = \\
&= -\frac{1}{3e^3} + \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{e}}^1 x^2 dx + \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = -\frac{1}{3e^3} + \frac{e^3}{3} + \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{e}}^1 - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^e = \\
&= -\frac{1}{3e^3} + \frac{e^3}{3} + \frac{1}{3} \left[\frac{1^3}{3} - \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^3}{3} \right] - \frac{1}{3} \left(\frac{e^3}{3} - \frac{1^3}{3} \right) = \\
&= -\frac{1}{3e^3} + e + \frac{1}{9} - \frac{1}{9e^3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{2e^6 + 2e^3 - 4}{9e^3}}
\end{aligned}$$