Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Δ 36.66

α) Για κάθε $x \in R$, θα είναι

$$f'(x) = \frac{2xf(x)}{x^2+1} \Rightarrow (x^2+1)f'(x) = 2xf(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2+1)f'(x) - 2xf(x) = 0 \overset{\text{διαιρούμε με}(x^2+1)^2 \neq 0}{\Rightarrow} \frac{(x^2+1)f'(x) - 2xf(x)}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\frac{f(x)}{x^2+1}\right]' = 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{x^2+1} = c \ \ (1)$$, όπου c: σταθερός

Ακόμη

$$(1) \overset{x=0}{\Rightarrow} \frac{f(0)}{0^2+1} = c \overset{f(0)=1}{\Rightarrow} c = 1 \ \ (2)$$

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{f(x)}{x^2+1} = 1 \Rightarrow f(x) = x^2+1$$, για κάθε $x \in R$

β) Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = [f(x)-2]g(x)$, $x \in R$

Η h είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,1]$ ως γινόμενο συνεχών
Η h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1,1)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων με

$$h'(x) = [f(x)-2]'g(x) + [f(x)-2]g'(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h'(x) = f'(x)g(x) + [f(x)-2]g'(x) \quad (3)$$

και

$$\left.\begin{array}{l} h(-1) = [f(-1)-2]g(-1) \overset{f(x)=x^2+1 \Rightarrow f(-1)=2}{\Rightarrow} h(-1) = 0 \\ h(1) = [f(1)-2]g(1) \overset{f(x)=x^2+1 \Rightarrow f(1)=2}{\Rightarrow} h(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h(-1) = h(1)$$

Άρα εφαρμόζεται για την h , το <u>θεώρημα Rolle</u> , στο διάστημα $[-1,1]$
και άρα υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} f'(\xi)g(\xi) + [f(\xi)-2]g'(\xi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(\xi)g(\xi) = -[f(\xi)-2]g'(\xi) \Rightarrow f'(\xi)g(\xi) = [2-f(\xi)]g'(\xi)$$

Άρα <u>η εξίσωση f′(x)g(x)=(2−f (x))g′(x) έχει τουλάχιστον μία πραγματική λύση</u>

γ) Θεωρούμε την συνάρτηση φ με $\varphi(x) = f(x) - 2e^{x-1} \Rightarrow \varphi(x) = x^2 + 1 - 2e^{x-1}$

Η φ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$\varphi'(x) = 2x - 2e^{x-1}$ και $\varphi''(x) = 2 - 2e^{x-1} = 2\left(1 - e^{x-1}\right)$

Τα πρόσημα της φ'' και η μονοτονία της φ', φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\varphi''(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi'(x)$		$\nearrow$	$\boxed{0}$	$\searrow$	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι $\varphi'(x) \le 0$, για κάθε $x \in R$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$) άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο R άρα και 1−1

Ακόμη

$\varphi(1) = 1^2 + 1 - 2e^{1-1} = 0$

οπότε η συνάρτηση φ , έχει ρίζα το 1 και επειδή η φ είναι 1 − 1, η ρίζα αυτή είναι και μοναδική

Άρα τελικά η εξίσωση $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2e^{x-1}$, έχει ακριβώς μία λύση

δ) Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = 2x - 2\ln\frac{x_o^2+1}{2} + 2$

Είναι $h'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2\ln\frac{x_o^2+1}{2} - 2 = 0 \Rightarrow x - \ln\frac{x_o^2+1}{2} - 1 = 0 \Rightarrow x = \ln\frac{x_o^2+1}{2} + 1$

Προφανώς για κάθε $x > \ln\frac{x_o^2+1}{2} + 1$ είναι $h'(x) > 0$

και για κάθε $x < \ln\frac{x_o^2+1}{2} + 1$ είναι $h'(x) < 0$

και άρα η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1 = \ln\frac{x_o^2+1}{2} + 1$

Όμως

Επειδή το x_o είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 2e^{x-1}$ θα είναι

$f(x_o) = 2e^{x_o-1} \overset{f(x)=x^2+1}{\Leftrightarrow} x_o^2 + 1 = 2e^{x_o-1} \Leftrightarrow \frac{x_o^2+1}{2} = e^{x_o-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln\frac{x_o^2+1}{2} = x_o - 1 \Leftrightarrow \ln\frac{x_o^2+1}{2} + 1 = x_o$

και άρα η h παρουσιάζει ελάχιστο στο x_o