

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΕΡΟΣ Β

ΘΕΜΑ Δ 36.65

α) Αφού η f' είναι συνεχής, θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, άρα

θα πρέπει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \alpha}{x}$, να υπάρχει στο $\mathbb{R}$, δηλαδή να είναι πραγματικός αριθμός

Όμως

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \alpha}{x} \in \mathbb{R} \\ \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - \alpha) = 1 - \alpha \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Αν } \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - \alpha) \neq 0 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \alpha}{x} \notin \mathbb{R} \\ \Rightarrow 1 - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \end{array}$$

Επίσης θα πρέπει

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0) &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \alpha}{x} = \lambda \xRightarrow{\alpha=1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lambda \xRightarrow[\text{DLH}]{\text{μορφή } \frac{0}{0}} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lambda \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = \lambda \Rightarrow \lambda = 1 \end{aligned}$$

β) Από το α) ερώτημα προκύπτει ότι

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Οπότε

Αν $x > 0$:

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x - 1 > 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

Αν $x < 0$:

$$\left. \begin{array}{l} x < 0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow e^x - 1 < 0 \\ x < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$\text{Αν } x = 0 \Rightarrow f'(0) = 1 > 0$$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

γ) i) Αρκεί να αποδειχτεί ότι η f' είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$

Πράγματι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \stackrel{\text{μορφή } \frac{0}{0}}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{\text{μορφή } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} \stackrel{\text{DLH}}{=} \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Άρα η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

ii) Από την (1) φαίνεται ότι για κάθε $x \neq 0$, η f' είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο

$$\text{παραγωγίσιμων με } f''(x) = \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

$$\text{Άρα } f''(x) = \begin{cases} \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} & \text{αν } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Για να δείξουμε ότι η f στρέφει τα κοίλα πάνω σε όλο το $\mathbb{R}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή αρκεί να αποδείξουμε ότι $xe^x - e^x + 1 > 0$ για κάθε $x \neq 0$

$$\text{Θέτουμε } g(x) = xe^x - e^x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Η } g \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } g'(x) = e^x + xe^x - e^x \Rightarrow g'(x) = xe^x$$

$$\text{Δηλαδή } g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Τα πρόσημα της g' , η μονοτονία και τα ακρότατα της g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$			

Από τον πίνακα φαίνεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $g(x) \geq 0 \Rightarrow xe^x - e^x + 1 \geq 0$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$)

Άρα τελικά $xe^x - e^x + 1 > 0$ για κάθε $x \neq 0$ και άρα η f στρέφει τα κοίλα πάνω σε όλο το $\mathbb{R}$

$$\delta) \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x)' f(x) dx \stackrel{\text{παραγοντική ολοκλήρωση}}{=} \left[xf(x) \right]_0^1 - \int_0^1 xf'(x) dx =$$

$$\stackrel{(1)}{=} f(1) - \int_0^1 \cancel{x} \frac{e^x - 1}{\cancel{x}} dx \stackrel{f(1)=e}{=} e - \int_0^1 (e^x - 1) dx \stackrel{f(1)=e}{=} e - \left[e^x - x \right]_0^1 =$$

$$= e - \left[e^x - x \right]_0^1 = e - \left[(e - 1) - (e^0 - 0) \right] = e - e + 1 + 1 = 2$$