

- α) Επειδή η εξίσωση $e^x f(x) = 1$ να έχει λύσεις τους αριθμούς $\rho_1 = 0$ και $\rho_2 = 1$, θα ισχύει

$$e^0 f(0) = 1 \Rightarrow f(0) = 1 \quad (1)$$

και

$$e^1 f(1) = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{e} \quad (2)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση h με $h(x) = 2f(x) - 1$, $x \in [0, 1]$

H h είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ ως διαφορά συνεχών

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= 2f(0) - 1 = 1 > 0 \\ h(1) &= 2f(1) - 1 = \frac{2}{e} - 1 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(0) \cdot h(1) < 0$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση

$h(x) = 0 \Leftrightarrow 2f(x) = 1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

- β) Θεωρούμε την συνάρτηση g με $g(x) = f(x) - e^{-x}$, $x \in [0, 1]$

H g είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ ως διαφορά συνεχών

H g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 1)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων με

$$g'(x) = f'(x) + e^{-x} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} g(0) &= f(0) - e^{-0} = 0 \\ g(1) &= f(1) - e^{-1} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(0) = g(1)$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) + e^{-x_0} = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = -e^{-x_0} \Leftrightarrow e^{x_0} f'(x_0) = -1$$

- γ) Θεωρούμε την συνάρτηση φ με $\varphi(x) = \left(f'(x) + \frac{1}{e}\right)(x-1) - (x-x_0)f(x)$,
 $x \in [0, 1]$

H φ είναι συνεχής στο διάστημα $[x_0, 1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x_0) &= \left(f'(x_0) + \frac{1}{e}\right)(x_0-1) - (x_0-x_0)f(x_0) \stackrel{f'(x_0)=-e^{-x_0}}{=} \\ &= \left(-e^{-x_0} + \frac{1}{e}\right)(x_0-1) \stackrel{x_0 \in (0,1) \Rightarrow x_0 < 1 \Rightarrow -x_0 > -1 \Rightarrow e^{-x_0} > e^{-1} \Rightarrow -e^{-x_0} + \frac{1}{e} < 0}{>} 0 \\ \varphi(1) &= \left(f'(1) + \frac{1}{e}\right)(1-1) - (1-x_0)f(1) \stackrel{f(1)=\frac{1}{e}}{=} \\ &= -(1-x_0) \stackrel{x_0 \in (0,1) \Rightarrow x_0 < 1}{<} 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi(x_0) \cdot \varphi(1) < 0$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση

$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \left(f'(x) + \frac{1}{e}\right)(x-1) - (x-x_0)f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα
στο διάστημα $(x_0, 1)$

$$\delta) \int_0^1 e^x (f(x) + xf(x) + xf'(x)) dx =$$

$$= \int_0^1 e^x (f(x) + xf(x)) dx + \int_0^1 xe^x f'(x) dx \quad \text{παραγοντική ολοκλήρωση} =$$

$$= \int_0^1 e^x (f(x) + xf(x)) dx + [xe^x f(x)]_0^1 - \int_0^1 (xe^x)' f(x) dx =$$

$$= \int_0^1 e^x (f(x) + xf(x)) dx + [xe^x f(x)]_0^1 - \int_0^1 (xe^x + e^x) f(x) dx$$

$$= \int_0^1 (\cancel{e^x f(x)} + \cancel{xe^x f(x)}) dx + [xe^x f(x)]_0^1 - \int_0^1 (\cancel{e^x f(x)} + \cancel{xe^x f(x)}) dx$$

$$= [xe^x f(x)]_0^1 = 1 \cdot e^1 \cdot f(1) - 0e^0 f(0) \stackrel{(2)}{=} 1$$